

Lösning av tentamen i MVE010 Inledande matematik I, 05 10 21

1. (a) Förlängning med $\sqrt{x^2+3}+2$ ger

$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} = \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2-1} = \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{x+1} \rightarrow \frac{2+2}{2} = 2,$$

när $x \rightarrow 1$.

Svar: 2.

- (b) Vi sätter $t = 1/x$ och har att $t \rightarrow \infty$ när $x \rightarrow 0^+$. Av detta ser vi

$$\frac{e^{-1/x}}{x^2} = \frac{t^2}{e^t} \rightarrow 0,$$

när $t \rightarrow \infty$, dvs när $x \rightarrow 0^+$ (ett standardgränsvärde).

Svar: 0.

2. Vi har $f(\sqrt{3}) = \arctan(-\sqrt{3}) = -\pi/3$. Derivering ger

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\frac{2x}{1-x^2})^2} \cdot \frac{2(1-x^2) + 4x^2}{(1-x^2)^2}.$$

Detta ger

$$f'(\sqrt{3}) = \frac{1}{1 + \frac{4 \cdot 3}{4}} \cdot \frac{2(1-3) + 4 \cdot 3}{(1-3)^2} = \frac{8}{4 + 4 \cdot 3} = \frac{1}{2}.$$

Detta ger att tangentlinjens ekvation har formen $y = x/2 + m$. Linjen ska gå genom $(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})) = (\sqrt{3}, -\pi/3)$, så $m = -\pi/3 - \sqrt{3}/2$.

Svar: $y = x/2 - \pi/3 - \sqrt{3}/2$.

3. Eftersom $f(x) = x^3/(x^2-4)$ gäller att $f(x) \rightarrow \pm\infty$ när $x \rightarrow \pm 2^\pm$, så vi har de lodräta asymptoterna $x = \pm 2$.

Vidare är $f(x) = x + 4/(x^2-4)$ så $f(x) - x \rightarrow 0$, när $x \rightarrow \pm\infty$, så $y = x$ är snedasymptot när $x \rightarrow \pm\infty$.

Vi har

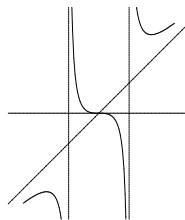
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x^2-4) - 2x^4}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2} = \\ &= \frac{x^2(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})}{(x^2-4)^2}. \end{aligned}$$

Detta ger

		$-2\sqrt{3}$		-2		0		2		$2\sqrt{3}$	
$f'(x)$	+	0	-	ej def	-	0	-	ej def	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	ej def	$\searrow$		$\searrow$	ej def	$\searrow$		$\nearrow$

Vi har lokalt maximum när $x = -2\sqrt{3}$ och $f(-2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$ samt lokalt minimum när $x = 2\sqrt{3}$ och $f(2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$.

Skiss av funktionen :



Svar: De lodräta asymptoterna är $x = \pm 2$ och den sneda är $y = x$, när $x \rightarrow \pm\infty$. Vidare är $\pm 3\sqrt{3}$ lokala extremvärden.

4. Vi sätter $A = (-1, 0, 2)$, $B = (1, 1, -1)$, $C = (2, 3, 1)$ och $P = (7, -4, 12)$. En normal till planet ges av

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{Bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -1 \end{Bmatrix} = (8, -7, 3).$$

Planets ekvation är alltså $8x - 7y + 3z = d$, där d ska bestämmas så att $(-1, 0, 2)$ löser ekvationen. Detta ger $8x - 7y + 3z = -2$.

Linjen genom p som är vinkelrät mot planet parametreras av $(x, y, z) = (7, -4, 12) + t(8, -7, 3)$ som insatt i planets ekvation ger

$$\begin{aligned} 8(7 + 8t) - 7(-4 - 7t) + 3(12 + 3t) &= -2 \\ (56 + 28 + 36) + (64 + 49 + 9)t &= -2 \\ 122t &= -122, \end{aligned}$$

som ger $t = -1$. Den punkt i planet som ligger närmast P har alltså koordinaterna $(7, -4, 12) - (8, -7, 3) = (-1, 3, 9)$.

Svar: $(-1, 3, 9)$.

5. Funktionen $f(x)$ definieras av elementärt uttryck när $x \neq 0$ och är därför kontinuerlig då. För att den ska vara kontinuerlig i $x = 0$ krävs att $f(x) = (b + \sin 3x - \tan x)/(x + x^3 e^{-x})$ har ett gränsvärde när $x \rightarrow 0$ och att a är detta gränsvärde.

Vi ser att nämnare för uttrycket för $f(x)$ går mot 0 när $x \neq 0$. Alltså måste också täljaren göra det om gränsvärdet ska finnas.

Detta ger $0 = b + \sin 0 - \tan 0$, så $b = 0$. Av detta och omskrivning får vi (när $x \neq 0$) med hjälp av standardgränsvärden

$$f(x) = \frac{\sin 3x - \tan x}{x + x^3 e^{-x}} = \frac{3 \sin(3x)/(3x) - \tan(x)/x}{1 + x^2 e^{-x}} \rightarrow \frac{3 \cdot 1 - 1}{1 + 0 \cdot 1} = 2,$$

när $x \rightarrow 0$.

Svar: $a = 2$ och $b = 0$.

6. Om v betecknar farten är bränslekostnaden per timme kv^3 för någon konstant k . För den aktuella färjan gäller $1000 = k \cdot 10^3$, så $k = 1$.

Om s betecknar tillryggalagd sträcka och t tiden gäller $s = tv$

Bränslekostnaden för att köra sträckan s med hastigheten v är $tv^3 = sv^3/v = sv^2$.

Personalkostnaden är $t \cdot 6750 = s \cdot 6750/v$. Detta ger att den totala kostnaden att köra sträckan s med farten v är $s(v^2 + 6750/v)$.

Om färjan framförs med farten v är kostnaden per kilometer alltså $f(v) = v^2 + 6750/v$.

Vi ser att $f(v) \rightarrow \infty$ när $v \rightarrow 0^+$ och när $v \rightarrow \infty$, så $f(v)$ antar ett minsta värde (i en stationär punkt).

De stationära punkterna löser ekvationen

$$0 = f'(v) = 2v - 6750/v^2 = 2(v^3 - 3375)/v^2,$$

$$\text{så } v = (3375)^{1/3} = (5 \cdot 675)^{1/3} = (5^2 \cdot 135)^{1/3} = (5^3 \cdot 27)^{1/3} = 5 \cdot 3 = 15.$$

Svar: Farten ska vara 15 km/h.

7. (c) i. Eftersom $f(-1) = f(1)$ är $f(x)$ inte inverterbar.
ii. Eftersom

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - x^2/\sqrt{1+x^2}}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} > 0$$

är $f(x)$ strängt växande och därmed inverterbar.

- iii. Eftersom $f(-1) = f(1)$ är $f(x)$ ej inverterbar.

- (d) Bara $f(x) = x/\sqrt{1+x^2}$ har invers. För att bestämma den löser vi ekvationen $y = x/\sqrt{1+x^2}$, där vi observerar att x och y ska ha samma tecken. Kvadrering och ommöblering ger

$$\begin{aligned}(1+x^2)y^2 &= x^2 \\ x^2(y^2-1) &= -y^2 \\ x &= \pm\sqrt{\frac{y^2}{1-y^2}}.\end{aligned}$$

Eftersom x och y har samma tecken ger detta $x = y/\sqrt{1-y^2}$.

Svar: $f^{-1}(x) = x/\sqrt{1-x^2}$.