Lösning av tentamen i MVE 010 Inledande matematik I, 05 01 09

1. (a) Räkneregler för logaritmer ger

$$\ln(1+3x^2) - 2\ln x \quad = \quad \ln\Big(\frac{1+3x^2}{x^2}\Big) \to \ln 3$$

när $x \to \infty$, eftersom $(1+3x^2)/x^2 = 1/x^2 + 3 \to 3$ då.

Svar: $\ln 3$.

(b) Vi har $\sin^2 x = (1 - cos 2x)/2$. Med detta har vi

$$\frac{1-\cos 2x}{e^{x^2}-1} \quad = \quad \frac{2\sin^2 x}{e^{x^2}-1} = 2\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2 \frac{x^2}{e^{x^2}-1} \to 2\cdot 1^2 \cdot \frac{1}{1} = 2,$$

när $x \to 0$, eftersom $\sin(t)/t \to 1$ och $(e^t - 1)/t \to 1$, när $t \to 0$.

Svar: 2.

2. Derivering ger

$$f'(x) \quad = \quad \frac{-(1+x^2) - 2x(1-x)}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(1+x^2)^2} = \frac{(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})}{(1+x^2)^2}$$

Detta ger att $f'(x)$ är < 0 när $0 \le x < 1+\sqrt{2}$ och att $f'(x)$ är > 0 när $1+\sqrt{2} < x \le 4$. Det betyder att $f(x)$ avtar respektive växer i dessa intervall. Det minsta värdet antas alltså i $x = 1+\sqrt{2}$, medan det största värdet är $f(0) = 1$ eller $f(4) = -3/17$.

Eftersom

$$f(1+\sqrt{2}) \quad = \quad \frac{-\sqrt{2}}{1+(1+\sqrt{2})^2} = \frac{-\sqrt{2}}{2(2+\sqrt{2})} = \frac{-\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{2(4-2)} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

är svaret

Svar: Minsta värdet är $(1-\sqrt{2})/2$ medan det största är 1.

3. Vi har att $f(x)$ bara är definierad när $x > 0$ och att $f'(x) = 1 + 1/x$, så att $f'(x) > 0$ för alla x. Detta ger att $f(x)$ är strängt växande och därför inverterbar.

Vi löser $1 = x + \ln x$ och ser att $x = 1$ duger. Detta ger $f^{-1}(1) = 1$.

Eftersom $f(f^{-1}(x)) = x$ ger derivering enligt kedjeregeln att $Df(f^{-1}(x))Df^{-1}(x) = 1$. Vi sätter $x = 1$ och ser att $Df^{-1}(1) = 1/Df(f^{-1}(1)) = 1/Df(1)$.

Men $Df(x) = 1 + 1/x$ så svaret blir

Svar: $1/2$.

4. Vi sätter $A = (-2,-2,4)$, $B = (-1,4,6)$ och $C = (1,2,3)$. Sätter vi $\vec{u} = \vec{AB} = (1,6,2)$ och $\vec{v} = \vec{AC} = (3,4,-1)$ har vi att triangelns area ges av $|\vec{u}\times\vec{v}|/2$. Vi beräknar

$$\vec{u}\times\vec{v} \quad = \quad \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{array} \right\} = (-14,7,-14) = 7(-2,1,-2)$$

Triangelns area är alltså $7\sqrt{4+1+4})/2 = 21/2$.

Svar: $21/2$.

5. Eftersom $e^{1/x} \to \infty$ när $x \to 0^+$ (men $e^{1/x} \to 0$, när $x \to 0^-$) har vi den lodräta asymptoten $x = 0$.

Vidare gäller att $f(x)/x = e^{1/x}(1+2/x) \to 1$, när $x \to \pm\infty$, så eventuella sneda asymptoter är $y = x + b$ där b är gränsvärdet av $f(x) - x$, när $x \to \pm\infty$. Men med $t = 1/x$ har vi

$$f(x) - x \quad = \quad e^{1/x}(2+x) - x = 2e^{1/x} + x(e^{1/x} - 1) = 2e^t + \frac{e^t - 1}{t} \to 2 + 1 = 3,$$

när $t \to 0$, dvs när $x \to \pm\infty$.

Vidare är $f(x) = x + 4/(x^2 - 4)$ så $f(x) - x \to 0$, när $x \to \pm\infty$, så $y = x$ är snedasymptot när $x \to \pm\infty$. Detta ger den sneda asymptoten $y = x + 3$, när $x \to \infty$.

Vi har sedan

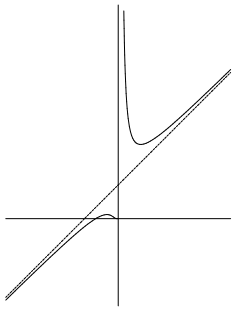
$$f'(x) \quad = \quad (1-(2+x)/x^2)e^{1/x} = \frac{x^2-x-2}{x^2}\cdot e^{1/x} = \frac{(x-2)(x+1)}{x^2}\cdot e^{1/x}.$$

Detta ger

		-1		0		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	ej def	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	ej def	$\searrow$		$\nearrow$

Vi har lokalt maximum när $x = 1$ och $f(-1) = e^{-1}$ samt lokalt minimum när $x = 2$ och $f(2) = 4e^{1/2}$.

Skiss av funktionen :



Svar: Den lodräta asymptoten är $x = 0$ och den sneda är $y = x + 3$, när $x \to \pm\infty$. Vidare är -1 och 2 lokala extrempunkter.

6. Normalen till grafen i punkten $(a, f(a))$ har ekvationen $y = -(x-a)/f'(a) + f(a)$. Detta ger att $b = a + f(a)f'(a)$, så att triangelns area är $A(a) = |(b-a)f(a)|/2 = f(a)^2|f'(a)|/2$.

   I vårt fall är $f(x) = 1 - e^{-x} = (e^x - 1)/e^x$, och $f'(x) = e^{-x}$ så att $A(x) = (e^x-1)^2/(2e^{3x})$.

   Vi har $A(x) \to 0$, när $x \to 0^+$ och när $x \to \infty$.

   Vidare är

$$A'(x) \quad = \quad \frac{2(e^x-1)e^x - 3(e^x-1)^2}{2e^{3x}} = \frac{(e^x-1)(3-e^x)}{2e^{3x}}.$$

   Av detta följer att $A(x)$ är växande när $0 < x < \ln(3)$ och avtagande när $x > \ln(3)$. Tillsammans med tidigare överväganden får vi att $A(x)$ saknar minsta värde, medan det största är $A(\ln(3)) = (3-1)^2/(2\cdot 3^3) = 2/27$

   Svar: Största värdet är $2/27$, minsta värde saknas.

7. (b) T.ex. $f(x) = |x|$, som är kontinuerlig men inte deriverbar i $x = 0$.

   (c) Derivatan $f'(2)$ är gränsvärdet av differenskvoten $Q = (f(x) - f(2))/(x-2)$, när $x \to 2$. Vi har

$$\begin{aligned} Q \quad &= \quad \frac{f(x)-8}{x-2} = \frac{x^3-8x+8}{(x-1)(x-2)} = \\ &= \quad \frac{(x-2)(x^2+2x-4)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x^2+2x-4}{x-1} \to 4, \end{aligned}$$

   när $x \to 2$.

   Svar: $f'(2) = 4$.