

Lösning av tentamen i MVE010 Inledande matematik I, 06 08 28

1. (a) Omskrivning ger

$$\frac{x \sin 2x}{e^{x^2} - 1} = \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 \cdot \frac{x^2}{e^{x^2} - 1} \rightarrow 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{1} = 2,$$

när $x \rightarrow 0$. Vi har utnyttjat standardgränsvärdena $\sin(t)/t \rightarrow 1$ och $(e^t - 1)/t \rightarrow 1$ när $t \rightarrow 1$.

Svar: 2.

- (b) Förlängning med $\sqrt{x^2 + 2x} + x$ ger

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 2x} - x &= \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \{\text{förkortning med } x\} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 + 2/x} + 1} \rightarrow \frac{2}{1 + 1} = 1, \end{aligned}$$

när $x \rightarrow \infty$.

Svar: 1.

2. Vi har $f(1) = \ln(1) \sin(\pi) - 1 \cdot e^0 = 0 - 1$. Derivering ger

$$f'(x) = 2(1/x) \sin(\pi x) + \ln(x) \pi \cos(\pi x) - e^{x^2-1} - 2x \cdot x e^{x^2-1}.$$

Detta ger

$$f'(1) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) - 1 - 2 \cdot 1 = -3.$$

Detta ger att tangentlinjens ekvation har formen $y = -3 + m$. Linjen ska gå genom $(1, f(1)) = (1, -1)$, så $m = 2$.

Svar: $y = -3x + 2$.

3. Vi ser att f är definierad utom när $x = 2$ och att $f(x) \rightarrow -\infty$ när $x \rightarrow 2^-$ samt att $f(x) \rightarrow \infty$ när $x \rightarrow 2^+$. Detta ger att $x = 2$ är en lodrät asymptot när $x \rightarrow 2^\pm$.

Eftersom $f(x) = x + 4/(x-2)$ gäller att $f(x) - x \rightarrow 0$ när $x \rightarrow \pm\infty$, så vi har den sneda asymptoten $y = x$ när $x \rightarrow \pm\infty$.

Vi har

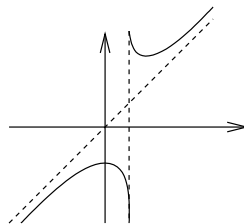
$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}.$$

Detta ger

		0		2		4	
$f'(x)$	+	0	-	ej def	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	ej def	$\searrow$	6	$\nearrow$

Vi har lokalt maximum när $x = 0$ och $f(0) = -2$ samt lokalt minimum när $x = 4$ och $f(4) = 6$.

Skiss av funktionen :



Svar: Den lodräta asymptoten är $x = 2$ och den sneda är $y = x$, när $x \rightarrow \pm\infty$. Vidare är -2 och 6 lokala extremvärden.

4. Vi sätter $A = (1, 2, -1)$, $B = (0, 2, 2)$, $C = (3, -, 1)$ och $P = (2, 1, -2)$. En normal till planet ges av

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \end{array} \right\} = (9, 8, 3).$$

Planets ekvation är alltså $9x + 8y + 3z = d$, där d ska bestämmas så att $(1, 2, -1)$ löser ekvationen. Detta ger $9x + 8y + 3z = 22$.

Linjen genom P som är vinkelrät mot planet parametreras av $(x, y, z) = (2, 1, -2) + t(9, 8, 3)$ som insatt i planets ekvation ger

$$\begin{aligned} 9(2 + 9t) + 8(1 + 8t) + 3(-2 + 3t) &= 22 \\ (81 + 64 + 9)t + (18 + 8 - 6) &= 22 \\ 154t &= 2, \end{aligned}$$

som ger $t = 1/77$. Den punkt i planet som ligger närmast P har alltså koordinaterna $(2, 1, -2) - (1/77)(9, 8, 3) = (145/77, 69/77, -157/77)$.

Svar: $(145/77, 69/77, -157/77)$.

5. Funktionen $f(x)$ definieras av elementärt uttryck när $x \neq 0$ och är därför kontinuerlig då. För att den ska vara kontinuerlig i $x = 0$ krävs att $f(x) = 1 + \sin(x^2)/x$ har ett gränsvärde när $x \rightarrow 0$ och att a är detta gränsvärde. Men $f(x) = 1 + x \cdot \sin(x^2)/x^2 \rightarrow 1 + 0 \cdot 1 = 1$, när $x \rightarrow 0$, så vi ska ha $a = 1$.

För deriverbarhet krävs att $(f(x) - f(0))/x$ har ett gränsvärde när $x \rightarrow 0$. Men $(f(x) - f(0))/x = \sin(x^2)/x^2 \rightarrow 1$, när $x \rightarrow 0$, så f är deriverbar i $x = 0$ med derivatan $f'(0) = 1$

D

Svar: $a = 1 = f(0)$, och $f'(0) = 1$.

6. Eftersom P ligger på ellipsen har den koordinater $(a, 2\sqrt{1-a^2})$. Om $A = (1, 0)$ och $B = (0, 2)$ är triangelns area hälften av den parallelogram som spänns ut av vektorerna $AP = (a-1, 2\sqrt{1-a^2})$ och $AB = (-1, 2)$. Denna area är absolutbeloppet av determinanten med vektorerna som rader:

$$\begin{vmatrix} a-1 & 2\sqrt{1-a^2} \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2a - 2 + 2\sqrt{1-a^2}.$$

I den sökta punkten P ska vi alltså välja a så att absolutbeloppet av $f(a) = a - 1 + \sqrt{1-a^2}$ är störst möjligt när a ligger mellan 0 och 1. Vi har $f'(a) = 1 - a/\sqrt{1-a^2}$ som är 0 bara när $a = \sqrt{1-a^2}$, dvs när $a = \pm 1/\sqrt{2}$. Eftersom $f(0) = f(1) = 0$ ska vi välja $a = 1/\sqrt{2}$. Den sökta punkten har då koordinaterna $P = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

Svar: $P = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

7. (c) T.ex. $f(x) = |x - 2|$.
 (d) Inte möjligt. Om en funktion är deriverbar i $x = 2$ är den med nödvändighet också kontinuerlig där.