

Repetitionsuppgifter

Trigonometri

1. Lös följande ekvationer

a) $8 \sin^2 v - 2 \cos v = 5$ b) $\tan 2v = 3 \tan v$ c) $(\sqrt{3}/2) \sin x + (1/2) \cos x = 1.$

Komplexa tal

2. Lös följande ekvationer

a) $z^4 = \sqrt{3} + i$ b) $z^3 = -1 + i.$

Gränsvärden

3. Beräkna följande gränsvärden

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \ln x + 3x^3}{x^3 + x \sin x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \sin(2-x) \ln(4-x^2).$

4. Beräkna följande gränsvärden

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}).$

5. Beräkna följande gränsvärden

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^3} - 1}{x \sin^2 x}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2 - 1} \right)^x.$

6. Beräkna följande gränsvärden

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}.$

7. Undersök eventuella gränsvärden till

$$f(x) = \frac{2x + \sqrt{x^2 + x}}{2x - \sqrt{x^2 + x}},$$

när $x \rightarrow \pm\infty$.

8. Bestäm om möjligt konstanterna a och b , så att funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - a} - \frac{bx^2 + 1}{x + 1}$$

har en lodrät asymptot i $x = 2$ och ett oegentligt gränsvärde när $x \rightarrow \infty$. Bestäm i så fall också detta gränsvärde.

9. För vilka värden på konstanten a gäller det att

$$f(x) = \frac{2x^3 + 1}{x^2 + x + 2} + ax + e^{\sin x}$$

har ett oegentligt gränsvärde ($\pm\infty$) när $x \rightarrow \infty$?

Talföljder

10. En talföljd ges av att

$$a_n = \sqrt[n]{n + \ln(2^n + 1)}.$$

Är talföljden konvergent. Vad är isåfall gränsvärdet?

11. En talföljd ges av att

$$\begin{cases} a_0 &= 1/2 \\ a_{n+1} &= 1 - 1/(1 + a_n) \text{ när } n \geq 0 \end{cases}$$

Visa att talföljden är avtagande. Visa också att talföljden är konvergent och beräkna gränsvärdet.

Kontinuitet

12. Bestäm om möjligt konstanten a så att

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - \cos x}{x} & \text{när } x \neq 0 \\ a & \text{när } x = 0 \end{cases}$$

blir kontinuerlig (överallt).

13. Visa att man kan bestämma konstanterna a och b så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{x^2+x-2} + \frac{a}{x^2+3x+2} & \text{när } x \neq -2 \\ b & \text{när } x = -2 \end{cases}$$

blir kontinuerlig. Vad är då a och b ?

Deriverbarhet, tangentlinje

14. Bestäm konstanterna a , b och c så att

$$f(x) = \begin{cases} a + bx + cx^2 & \text{när } x \leq 1 \\ \arctan x & \text{när } x > 1 \end{cases}$$

blir två gånger deriverbar.

15. Bestäm ett polynom $P(x)$ av lägsta grad så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{när } x < 0 \\ P(x) & \text{när } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 + \ln(x^2) & \text{när } x > 1 \end{cases}$$

blir överallt deriverbar.

16. Bestäm en ekvation för tangentlinjen till kurvan

$$y = \frac{x+2}{x^2+1}$$

i den punkt på kurvan där $x = 1$.

17. Bestäm en ekvation för tangentlinjen till kurvan $y^3 - xy = 6$ i punkten $(7, 2)$.

Användning av derivata

18. Visa att $f(x) = \ln x - a \arctan x$, när $x > 0$, är inverterbar om $a \leq 2$.

19. Visa att $f(x) = 14 + \cos x - x \arctan x$ är inverterbar på intervallet $[0, \infty[$.

20. Visa att $f(x) = 2 \arctan x - \arctan(x^2)$ är inverterbar och bestäm $Df^{-1}(-3\pi/4)$.

21. Bestäm värdemängden till

$$\text{a)} \quad f(x) = 1 - \frac{1}{x} - \arctan x \qquad \text{b)} \quad f(x) = e^x(x^3 - 4x^2 + 8x - 8).$$

22. Bestäm värdemängden till

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

när $0 < x < 1$.

23. Rita grafen till

$$f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

24. Rita grafen till

$$\text{a)} \quad f(x) = (x - 1)^3 \sqrt{x^2} \qquad \text{b)} \quad f(x) = x - \arctan(2x).$$

25. Visa att

$$\frac{x - 1}{\sqrt{x}} > \ln x > \frac{2(x - 1)}{x + 1},$$

när $x > 1$.

26. Visa att $\sin x + \tan x > 2x$, när $0 < x < \pi/2$.

27. Hur många lösningar har ekvationen $4 \arctan x = x^2$?

28. I en rätvinklig triangel är hypotenusan a (fixt). Vilken är den största omkrets triangeln kan ha?

Svar: $(1 + \sqrt{2})a$.

29. En 20 m hög staty står på en 5 m hög sockel. På vilket avstånd ses statyn under störst vinkel (med ögat placerat i nivå med markplanet)?

Vektorer, linjer och plan

I samtliga uppgifter ges koordinater i ett ON-system.

30. En triangel har sina hörn i punkterna $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 3, 3)$ och $C = (-1, 0, 3)$. Bestäm triangelns vinklar och sidor.

31. Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $(1, 2, 2)$ på vektorn $(3, -1, 2)$.

32. Bestäm avståndet mellan punkten $(1, 2, 1)$ och planet $x + y + 2z = 4$.

33. Bestäm avståndet mellan punkten $(1, 1, 1)$ och linjen genom de två punkterna $(3, 2, 1)$ och $(2, 4, -1)$.

34. Vilken punkt på skärningslinjen mellan de två planen $0 = x + y + z$ och $2 = 3x + y - z$ ligger närmast punkten $(1, 2, 1)$?

35. Bestäm skärningspunkten mellan linjen genom de två punkterna $(1, -2, 1)$ samt $(0, 2, 1)$ och planet som har normal $(1, 2, 3)$ och går genom punkten $(4, 0, 0)$.

Ekvationssystem

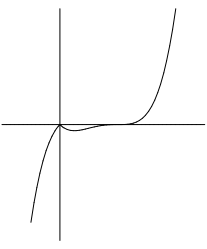
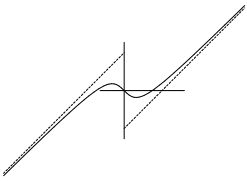
36. För vilka värden på α saknar ekvationsystemet

$$\begin{cases} x - 2ay + z = a + 1 \\ 2x - y + az = 3 \\ x - y + (1 - a)z = 2 \end{cases}$$

lösning?

Förslag till svar

1. a) $v = \pm\pi/3 + n2\pi, \pm \arccos(-3/4) + n2\pi$ b) $v = n\pi, \pm\pi/6 + n\pi$ c) $v = \pi/3 + n2\pi$.
2. a) $z = 2^{1/4}(\cos(\pi/24 + n\pi/2) + i \sin(\pi/24 + n\pi/2))$, där $n = 0, 1, 2, 3$ b) $z = 2^{1/6}(\cos(\pi/4 + 2n\pi/3) + i \sin(\pi/4 + 2n\pi/3))$, där $n = 0, 1, 2$
3. a) 3 b) 0
4. a) $1/2$ b) -1
5. a) $3/2$ b) 1
6. a) 1 b) $-1/2$
7. Gränsvärdet är 3 när $x \rightarrow \infty$ och $1/3$ när $x \rightarrow -\infty$
8. $a = 2$ och $b \neq 1$. Gränsvärdet är $-\infty$ när $b > 1$ och ∞ när $b < 1$.
9. $a \neq -2$
10. Konvergent med gränsvärdet 1.
11. Gränsvärdet är 0.
12. 2
13. $a = 5/3$ och $b = -13/9$
14. $a = (\pi - 3)/4, b = 1$ och $c = -1/4$
15. $P(x) = x^2 + 1$
16. $y = -x + 5/2$
17. $y = 2x/5 - 4/5$
20. $Df^{-1}(-3\pi/4) = 1$
21. a) Värdeområdet består av alla x sådana att $x < -\pi/2$ eller $x > \pi/2$. b) $[-3e, \infty[$.
22. $]1, e - 1[$
Lokalt min i $x = -1$, lok
max i $x = 1$. $y = 0$
23. är en (sned) asymptot när $x \rightarrow \pm\infty$. Värdeområdet är $[-1, 1]$.

24. a) Lokalt min i $x = 1/3$, lok
max i $x = 0$. $f(x) \rightarrow \infty$, när
 $x \rightarrow \infty$ och $f(x) \rightarrow -\infty$, när
 $x \rightarrow -\infty$. Värdeområdet är
 $\mathbf{R}$ (alla reella tal).

- b) Lok max i $x = -1/2$, lok
min i $x = 1/2$. $y = x + \pi/2$ är
asymptot när $x \rightarrow -\infty, y =$
 $x - \pi/2$ är asymptot när $x \rightarrow$
 ∞ , värdeområdet är $\mathbf{R}$.

27. Två stycken.
28. $(1 + \sqrt{2})a$
29. $5\sqrt{5}$ m från statyn.
30. Vinkeln vid A är rät, de två andra är $\pi/4$. Avståndet mellan A och B samt A och C är 3. Avståndet mellan B och C är $3\sqrt{2}$.
31. $(5/14)(3, -1, 2)$
32. $1/\sqrt{6}$
33. $\sqrt{5}$
34. $(1/6, 4/6, -5/6)$
35. $(3/7, 2/7, 1)$
36. $a = (3 \pm \sqrt{6})/6$