MVE011 Inledande matematik för I1
Svar eller lösningar till tentamen oktober 2011

1a $x=-6, \quad x=12$

1b Systemet saknar lösning

1c $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{11}}{6}$

1d $y-x=\ln 2-1$

1e (i) $\dfrac{3}{2}$ (ii) $-\dfrac{1}{4}$ (iii) -1

Kommentar till (iii): sätt $y=\arctan x-\dfrac{\pi}{2}$ *och använd att* $\tan\left(y+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{\tan y}$

1f Svar: 2 **(** $\left|e^{ix}+e^{2ix}\right| \le \left|e^{ix}\right|+\left|e^{2ix}\right|=2 \quad \textit{och} \quad f(0)=2$ **)**

2 Två vektorer i planet: (1,2,0) och (2,1,-1). Så en normalvektor till planet ges av $(1,2,0)\times(2,1,-1)=(-2,1,-3)$. Planets ekvation: $2x-y+3z=D$ och genom att sätta in till exempel (1,1,1) får man D=4.

Svar: $2x-y+3z=4$

$2\cdot 3-5+3\cdot 2\neq 4$, så NEJ.

En riktningsvektor för linjen: (5,-2,1) och en ekvation: $\begin{cases} x=5t+4 \\ y=-2t+1 \\ z=t-2 \end{cases}$

Systemet $\begin{cases} 2=5t+4 \\ 2=-2t+1 \\ 0=t-2 \end{cases}$ saknar lösning, så NEJ.

3 Funktionen är definierad för $x < \frac{1}{2}$

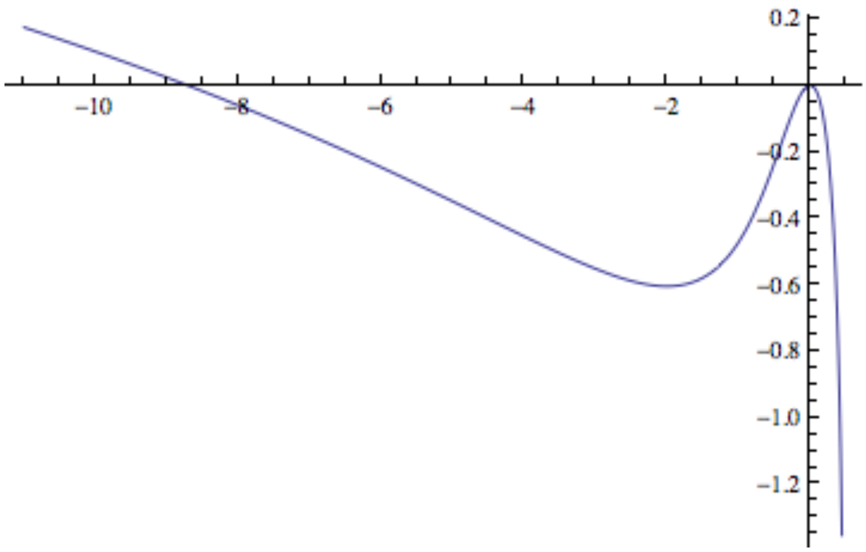
$$y' = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1-2x} = -\frac{2x(x+2)}{(1+x^2)(1-2x)}$$

$y(-2) = \ln 5 - 2\arctan 2 \qquad y(0) = 0 \qquad y(x) \to -\infty \text{ då } x \uparrow \frac{1}{2}$

En asymptot: $x = \frac{1}{2}$

Teckenschema:

x		-2		0		$\frac{1}{2}$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$\downarrow$	$\ln 5 - 2\arctan 2$	$\uparrow$	0	$\downarrow$	$-\infty$



4 Om triangelns hörn i den andra kvadranten är $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ blir arean

$$= \frac{(1-\cos\alpha)2\sin\alpha}{2} = \sin\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

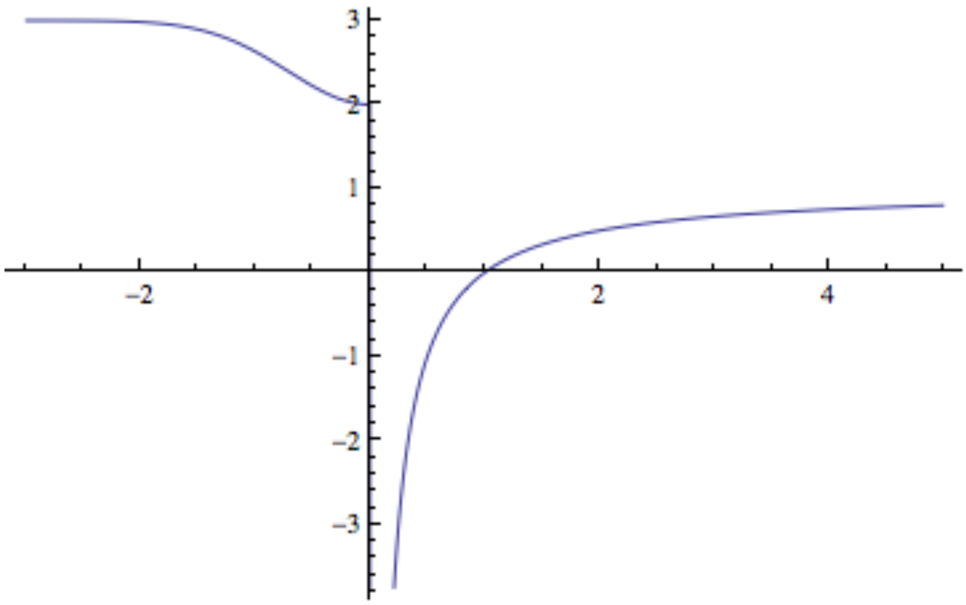
Uppgiften blir alltså att hitta största värde till $f(\alpha) = \sin\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}, \quad \frac{\pi}{2} \le \alpha < \pi$

Här kan vi tillåta oss ta med även den högra ändpunkten $\alpha = \pi$ där triangeln urartar och får area = 0, och därmed behöver vi bara jämför funktionsvärden i vänster ändpunkt och punkter där derivatan =0 (intervallet är ju i så fall kompakt).

$f'(\alpha) = \cos\alpha - \cos 2\alpha$ med $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ som enda nollställe i det aktuella intervallet.

Jämförelsen ger att största värde är $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

5 Man ser lätt att $f(x)$ är strängt avtagande då $x \le 0$ och strängt växande då $x > 0$. Dessutom är $f(0) = 2$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ och därför måste $f(x)$ vara inverterbar.



Vidare är $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$ och $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = -\infty$ så värdemängden till $f(x)$ är $= (-\infty,1) \cup [2,3)$ som ju också är inversens definitionsmängd.

Slutligen, eftersom $f(1) = 0$ blir $\left(f^{-1}\right)'(0) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{\frac{1}{1^2}} = 1$

6 **S S S F F F**

7a se boken

7b $\dfrac{h(1+t) - h(1)}{t} = \dfrac{f(1+t)g(1+t) - f(1)g(1)}{t} = \dfrac{f(1+t)g(1+t)}{t} \to f(1)g'(1)$ då $t \to 0$.
Alltså är $h(x)$ deriverbar i $x = 1$