

Lösningar till Inledande matematik för Z1, (TMV120), 2012-01-14

1. (a) Faktorisering ger $15 = 3 \cdot 5$, $49 = 7^2$, och $35 = 5 \cdot 7$. Detta och förkortning ger

$$\frac{15^{16} \cdot 49^7}{35^{15} \cdot 3^{16}} = \frac{3^{16} \cdot 5^{16} \cdot 7^{2 \cdot 7}}{5^{15} \cdot 7^{15} \cdot 3^{16}} = \frac{5}{7}$$

Svar: $5/7$.

- (b) Kedjeregeln ger $f'(x) = e^{x^2-1} \cdot 2x$ och därmed $f'(1) = 2e^0 = 2$.

Svar: 2.

- (c) Den utökade koefficientmatrisen A undergår radoperationer:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -14 & -18 & 19 \\ 21 & -10 & 4 & -18 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -3 \\ 21 & -10 & 4 & -18 \\ -6 & -14 & -18 & 19 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & -16 & -16 & 13 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -13/16 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3/16 \end{pmatrix}.$$

I det första steget byter första och tredje raderna plats. I det andra subtraheras rad 1 multiplicerad med 7 från rad 2 och rad 1 multiplicerad med 2 läggs till rad 3. Därefter multipliceras rad 2 med $-1/3$ och rad 3 med $-1/16$. Till sist subtraheras rad 2 från rad 3. Resultatet är en matris på trappstegsform där sista kolonnen har pivot element. Alltså saknas lösning.

Svar: Det finns ingen lösning.

- (d) Man har att $\cos(2v) = 1 - 2\sin^2(v)$ (formel för dubbla vinkeln). Detta ger $\cos(2v) = 1 - 2/9 = 7/9$

Svar: $7/9$.

- (e) i. Räkne regler för logaritmer ger att $\ln(2x+1) - \ln x = \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)$. Eftersom $(2x+1)/x \rightarrow 2$, när $x \rightarrow \infty$, gäller att $\ln(2x+1) - \ln x \rightarrow \ln 2$ då.

Svar: $\ln 2$.

- ii. Med $Q = (1+x)^{3/2} / \ln(x+1)$ är Q av typen "0/0" när $x \rightarrow 0$. Derivering av täljare och nämnare för sig ger $Q_1 = (3/2)(1+x)^{1/2} / (1/(1+x))$, som har gränsvärdet $3/2$, när $x \rightarrow 0$. Enligt l'Hospitals regel har Q också detta gränsvärde.

Svar: $3/2$.

- (f) Om $f^{-1}(\ln 3) = a$, så är $\ln 3 = f(a) = \ln \sqrt{1+a^3}$, så $3 = \sqrt{1+a^3}$ och alltså $9 = 1 + a^3$. Det ger $a = 2$. Alltså är $f^{-1}(\ln 3) = 2$ och $\ln 3 = f(2)$.

Eftersom $f^{-1}(f(x)) = x$, för alla $x > -1$, ger derivering att $Df^{-1}(f(x))f'(x) = 1$, eller $Df^{-1}(f(x)) = 1/f'(x)$. När $f(x) = \ln \sqrt{1+x^3} = (1/2)\ln(1+x^3)$, är $f'(x) = (1/2)(3x^2/(1+x^3)) = 3x^2/(2(1+x^3))$ och alltså är $Df^{-1}(f(x)) = 2(1+x^3)/3x^2$. Sätter vi $x = a = 2$ ger detta $Df^{-1}(\ln 3) = 2(1+8)/(3 \cdot 4) = 3/2$, så tangenten har lutning $3/2$ och går genom punkten $(\ln 3, 2)$. Den har därför ekvationen $y = (3/2)(x - \ln 3) + 2$

Svar: $y = 3x/2 + 2 - (3 \ln 3)/2$.

2. (a) Planet går genom de tre punkterna A , B och C , så $\vec{u} = \vec{AB}$ och $\vec{v} = \vec{AC}$ är vektorer parallella med planet.

En normal till planet ges av

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Planet har därför en ekvation $4x - 3y - 6z = d$. Det går genom $A = (2, 1, 1)$, så $8 - 3 - 6 = d$.

Svar: $4x - 3y - 6z = -1$.

- (b) Avstånds formeln ger att avståndet mellan en punkt (a, b, c) och planet är

$$\frac{|4a - 3b - 6c - (-1)|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2 + (-6)^2}}.$$

Detta ger att avståndet mellan $D = (6, -2, 4)$ och planet är $7/\sqrt{61}$.

Svar: $7/\sqrt{61}$.

- (c) Punkten D ligger på linjen bara om $\overrightarrow{AD}$ är parallell med normalen $\vec{n}$ till planet.

Men

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

är inte parallella, eftersom de har samma första koordinat men olika tredje.

Svar: Nej.

3. Eftersom $\sqrt{2x+1}$, bara är definierat när $2x+1 \geq 0$, dvs när $x \geq -1/2$, är definitionsmängden intervallet $[-1/2, \infty)$.

Derivering med hjälp av produkt- och kedjeregeln ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x^2-x} \cdot D(-x^2-x) \cdot \sqrt{2x+1} + e^{-x^2-x} \cdot \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \\ &= -e^{-x^2-x} \left((2x+1)\sqrt{2x+1} + \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \right) = -\frac{e^{-x^2-x}}{\sqrt{2x+1}} \cdot ((2x+1)^2 + 1) = \\ &= -\frac{e^{-x^2-x}}{\sqrt{2x+1}} \cdot (x+1)(4x) \end{aligned}$$

Här är kvoten i uttrycket alltid ≥ 0 , så tecknet på f' bestäms av tecknet på $-4x(x+1)$, som på intervallet $x > -1/2$ bara byter tecken i $x = 0$ och där går från positivt till negativt.

Det betyder att f växer på $[-1/2, 0]$ och avtar på $[0, \infty)$. Detta ger att f 's största värde är $f(0) = 1$.

Av $f(x) = e^{-x^2-x}\sqrt{2x+1}$, ser vi att $f(x) \geq 0$, för alla x och att $f(-1/2) = 0$ som alltså är f 's minsta värde.

Eftersom f är kontinuerlig på intervallet $[-1/2, \infty)$ är värdemängden ett intervall. Av det som framkommit måste det vara $[0, 1]$.

Svar: Definitionsmängden är $[-1/2, \infty)$ och värdemängden är $[0, 1]$.

4. För nämnaren gäller att $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$, så den har nollställena -1 och 2 . Detta ger att definitionsmängden är alla reella tal utom -1 och 2 .

Inget av dessa tal är nollställen till täljaren, så vi har de lodräta asymptoterna $x = -1$ och $x = 2$. Specifikt gäller

$$f(x) \rightarrow \begin{cases} \infty & \text{när} & x \rightarrow -1^- \\ -\infty & \text{när} & x \rightarrow -1^+ \\ -\infty & \text{när} & x \rightarrow 2^- \\ \infty & \text{när} & x \rightarrow 2^+ \end{cases}$$

När $x \rightarrow \pm\infty$, gäller att $f(x) \rightarrow 3$, så att $y = 3$ är en vågrät asymptot så väl när $x \rightarrow \infty$, som när $x \rightarrow -\infty$.

Vi avgör var f växer och avtar genom att undersöka f' . Före derivering gör vi polynomdivision och får

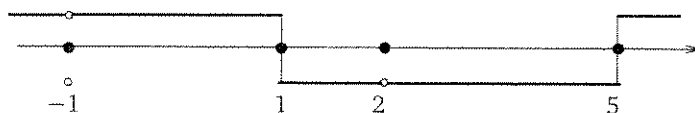
$$f(x) = \frac{3x^2 - 6x + 3}{x^2 - x - 2} = 3 - \frac{3x - 9}{x^2 - x - 2}.$$

Derivering enligt kvotregeln ger nu

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{3(x^2 - x - 2) - (3x - 9)(2x - 1)}{(x^2 - x - 2)^2} = -\frac{3x^2 - 18x + 15}{(x^2 - x - 2)^2} = \\ &= \frac{(x - 1)(3x - 15)}{(x - 2)^2(x + 1)^2} = 3 \cdot \frac{(x - 1)(x - 5)}{(x - 2)^2(x + 1)^2} \end{aligned}$$

Det betyder att f' växlar tecken i 1 och 5.

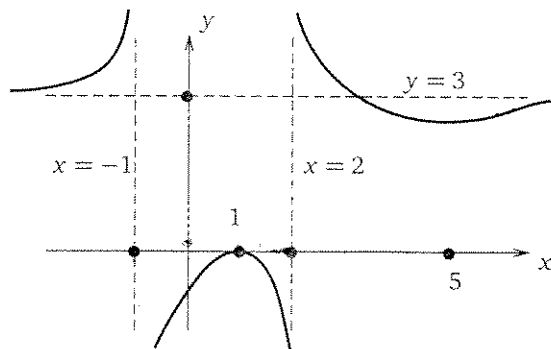
Det ger följande teckenstudium:



som visar att f växer på intervallen $(-\infty, -1)$, $(-1, 1]$ och $[5, \infty)$, medan den avtar på $[1, 2)$ samt $(2, 5]$.

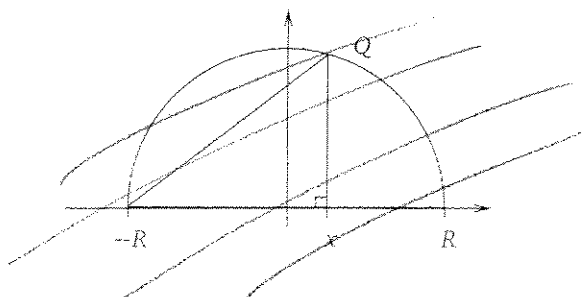
Av detta följer att f har ett lokalt maximum $f(1) = 0$ i $x = 1$ och ett lokalt minimum $f(5) = 3 - 1/3 = 8/3$ i $x = 5$.

Detta ger oss grafen



Vi ser nu att värdemängden är $(-\infty, 0] \cup [8/3, \infty)$.

5. Inför beteckningar som i figuren:



Triangeln har då basen $x - (-R) = x + R$ och höjden $\sqrt{R^2 - x^2}$, så att arean är $(x + R)\sqrt{R^2 - x^2}/2$, där $-R \leq x \leq R$.

Vi söker största värdet av $f(x) = (x + R)\sqrt{R^2 - x^2}$ på intervallet $[-R, R]$. Svaret är hälften av detta.

Derivering ger

$$f'(x) = \sqrt{R^2 - x^2} + \frac{(x + R)(-2x)}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{R^2 - x^2 - Rx - x^2}{\sqrt{R^2 - Rx - 2x^2}} = \frac{(R - 2x)(R + x)}{\sqrt{R^2 - Rx - 2x^2}}$$

som på intervallet $(-R, R)$ bara växlar tecken i $x = R/2$ och där går från positivt till negativt när x passerar $R/2$ från vänster till höger. Det betyder att f 's största värde antas när $x = R/2$ och att det är $f(R/2) = (3R/2)R\sqrt{3}/4 = 3\sqrt{3}R^2/4$.

Triangelns största area är alltså $3\sqrt{3}R^2/8$.

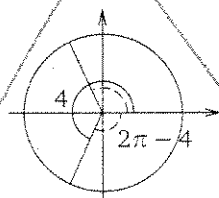
Svar: $3\sqrt{3}R^2/8$.

6. (a) Om $\bar{z} = 3/z$, så är $|z|^2 = z\bar{z} = 3$ och $|z| = \sqrt{3}$, som är < 2 , så påståendet stämmer
Svar: Sant.

- (b) När $t \rightarrow 0^+$, gäller att $\ln t \rightarrow -\infty$. Detta ger att $\ln|x| \rightarrow -\infty$, när $x \rightarrow 0$ och att $1/\ln|x| \rightarrow 0$ då. Alltså gäller att $x \ln|x| \rightarrow 0 = f(0)$, när $x \rightarrow 0$. Det betyder att f är kontinuerlig i $x = 0$.

Svar: Sant.

- (c) Det gäller att $\arccos(\cos(x)) = x$, under förutsättning att x är i intervallet $[0, \pi]$. Trigonometriska identiteter (se figuren nedan) ger att $\cos 4 = \cos(2\pi - 4)$, där $0 < 2\pi - 4 < \pi$. Det betyder att $\arccos(\cos 4) = \arccos(\cos(2\pi - 4)) = 2\pi - 4 \neq 4$. Påståendet stämmer alltså inte.



Svar: Falskt.

- (d) Eftersom $f'(t) \rightarrow 1$, när $t \rightarrow \infty$, så gäller att $f'(t) > 1/2$, för alla tillräckligt stora värden på t . Enligt medelvädes satsen gäller att $f(x+1) - f(x) = f'(t)(x+1-x) = f'(t)$, för något t mellan x och $x+1$. För alla tillräckligt stora värden på x gäller därmed att $f(x+1) - f(x) > 1/2$, eller att $f(x+1) > f(x) + 1/2$. Påståendet stämmer alltså.

Svar: Sant.

- (e) Med $f(x) = 2x^2$ gäller att $f'(x) = 4x$ och att $f'(1) = 4$. Det ger att normalens riktningskoefficient är $-1/4$. Den går genom $(1, 2)$, så en ekvation för normalen är $y = (-1/4)(x - 1) + 4$. När $x = 4$ blir $y \neq 0$. Punkten $(4, 0)$ ligger alltså inte på normalen.

Svar: Falskt.

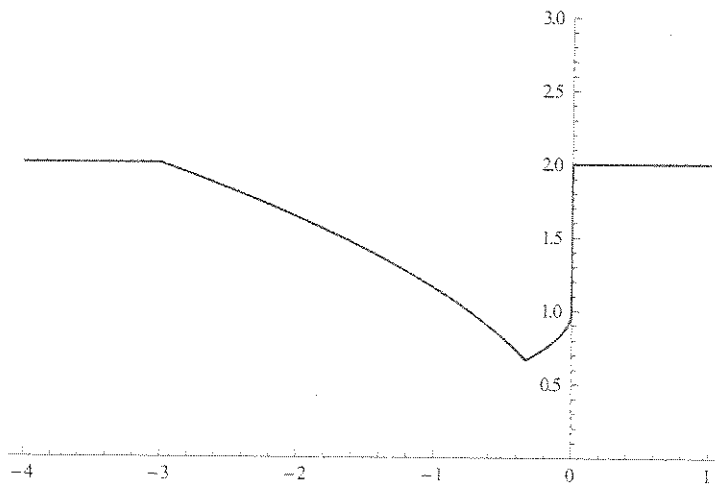
- (f) Derivering av $f(x) = e^{-x^2-x}$ ger $f'(x) = e^{-x^2-x}(-2x-1)$ som växlar tecken från positivt till negativt i $x = -1/2$. Det betyder att f har ett lokalt maximum i $x = -1/2$. Påståendet stämmer alltså inte.

Svar: Falskt.

5. Det är klart att $h(0) = 2$. Om a nära 0 och $a < 0$ kommer $f(x)$ växa utom på ett litet intervall nära $x = 0$ där den avtar. Man inser att $\lim_{a \rightarrow 0^-} h(a) = 1$ så $h(a)$ ej kontinuerlig i $a = 0$.

$$\text{Vidare blir } h(a) = \begin{cases} 2 & \text{om } a \geq 0 \text{ eller } a < -3 \\ 2\sqrt{\frac{-a}{3}} & \text{om } -3 \leq a < -\frac{1}{3} \\ 1 - \sqrt{\frac{-a}{3}} & \text{om } -\frac{1}{3} \leq a < 0 \end{cases}$$

Graf:



- 6
- a) S
 - b) S
 - c) F
 - d) S
 - e) F
 - f) S

