Lösningar - extra - grafritning.

1) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = \dfrac{(x^2+1)}{(x-1)(x+1)} = 1 + \dfrac{2}{x^2-1}$

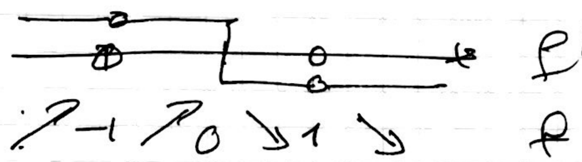
Ska ha $x \neq \pm 1$ $\quad D_f = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty)$

$f(x) \to \begin{cases} \infty & \text{när } x \to -1^- \\ -\infty & \text{när } x \to -1^+ \end{cases}$ $\quad x=-1$ asymptot

$f(x) \to \begin{cases} -\infty & \text{när } x \to 0^- \\ \infty & \text{när } x \to 0^+ \end{cases}$ $\quad x=0$ asymptot

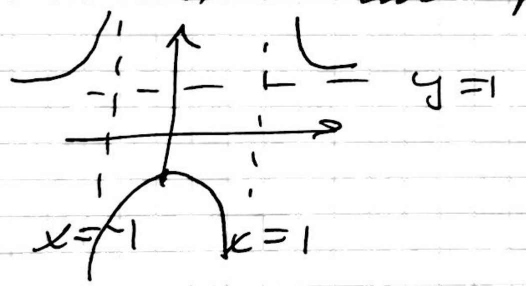
$f(x) \to 1$ när $x \to \pm\infty$ $\quad y=1$ asymptot i $\pm\infty$

$f'(x) = \{f(x) = 1 + \frac{2}{x^2-1}\} = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-4x}{(x-1)^2(x+1)^2}$



lok max i 0
$f(0) = -1$
lok min saknas.

f strängt väx. på $(-\infty,-1) \cup (-1,0)$,
— " — avt på $(0,1)$, $(1,\infty)$



$V_f = (-\infty,-1] \cup (1,\infty)$.

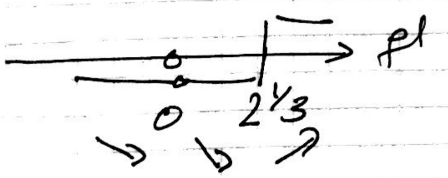
2) Antal lösningar (reella) till $x^3 - ax + 1 = 0$.
$x=0$ aldrig lösning. Kan förutsätta $x \neq 0$
$x^3 - ax + 1 = 0$, $\quad \dfrac{x^3+1}{x} = a$. $\quad f(x) = \dfrac{x^3+1}{x}$ Skissar graf.

– $D_f = (-\infty,0) \cup (0,\infty)$.
$f(x) \to -\infty$ när $x \to 0^-$, $f(x) \to \infty$ när $x \to 0^+$
$f(x) \approx x^2$ när $x \to \pm\infty$ så inga sneda/horisontella
– $x=0$ enda asymptoten

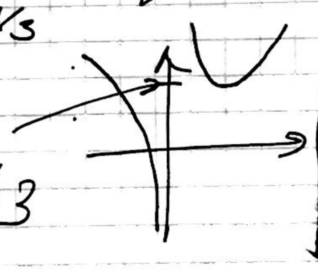
$f'(x) = \dfrac{3x^3 - (x^3+1)}{x^2} = \dfrac{2(x^3-2)}{x^2}$

Svar: 1 när $a < 3 \cdot 2^{1/3}$
2 när $a = 3 \cdot 2^{1/3}$
3 annars.

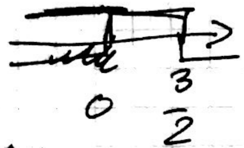
$x^3 - 2$ har nollst. $2^{1/3}$ och strängt väx. så byter bara tecken i $2^{1/3}$



Lok mini $2^{1/3}$
$f(2^{1/3}) = 2^{1/3} \cdot 3$



3 $f(x) = \ln(x^2(3-2x))$ Ska ha $x^2(3-2x)>0$



$x^2(3-2x)>0$

$D_f = (-\infty,0)\cup(0,3/2)$.

Klar $f(x)\to-\infty$ när $x\to 0^{\pm}$ — $x=0$ asymptot

$f(x)\to-\infty$ när $x\to \frac{3}{2}^{-}$ — $x=3/2$ asymptot.

$f(x)\to\infty$ när $x\to-\infty$.

$\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln((-x)^2(3-2x))}{x} = \begin{cases} t=-x \\ t\to\infty \text{ när } x\to-\infty \end{cases}$

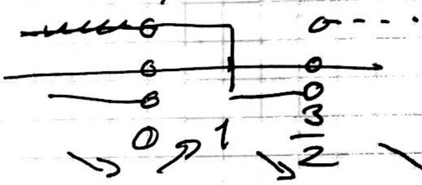
$= -2\frac{\ln(t)}{t} - \frac{\ln(3+2t)}{t}\to 0$ när $t\to\infty$

dvs när $x\to-\infty$.

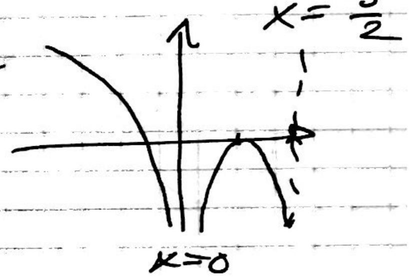
$f(x)-0\cdot x = f(x)\to\infty$ när $x\to-\infty$

Ingen asymptot i $-\infty$.

$f'(x) = \frac{6x(1-x)}{x^2(3-2x)}$

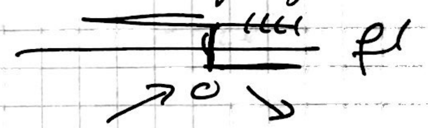


lok. max i 1: $f(1)=0$



4. $f(x)=e^{-x^2}$ Skissar först grafen

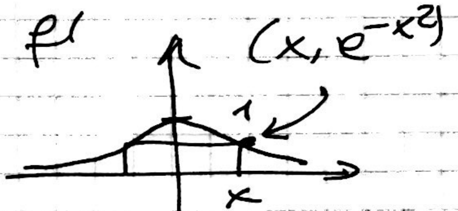
$f'(x) = -2xe^{-x^2}$



$f(x)=f(-x)$

$f(x)\to 0$ när $x\to\pm\infty$

$f(0)=1$

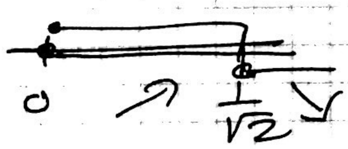


Ska bestämma max av $A(x)=2x\cdot e^{-x^2}$, $x\in[0,\infty)$

Har $A(0)=0$, $A(x)\to 0$ när $x\to\infty$.

$A'(x) = 2e^{-x^2}-4x^2e^{-x^2} = 4e^{-x^2}(\frac{1}{2}-x^2)$

$= 4e^{-x^2}(\frac{1}{\sqrt2}-x)(\frac{1}{\sqrt2}+x)$



Största värde i $\frac{1}{\sqrt2}$

Dvs är $A(\frac{1}{\sqrt2}) = \sqrt2\, e^{-1/2} = \frac{\sqrt2}{\sqrt e}$

Svar $\frac{\sqrt2}{\sqrt e}$

5. $f(x) = \frac{2x-1}{x}\cdot\frac{1}{e^x} = (2-\frac{1}{x})e^{-x}$.

Ska ha $x \neq 0$ $\quad D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$f(x) \to \begin{cases} \infty & \text{när } x \to 0^- \\ -\infty & \text{när } x \to 0^+ \end{cases}$ $\quad x=0$ asymptot.

$f(x) \to \begin{cases} \infty & \text{när } x \to -\infty \\ 0 & \text{när } x \to \infty \end{cases}$ $\quad y=0$ asymptot i ∞

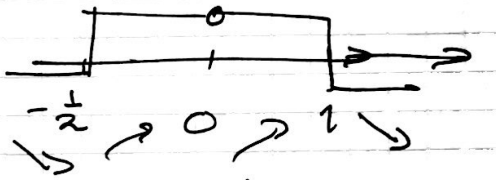
$\frac{f(x)}{x} = \frac{2x-1}{x^2}\frac{1}{e^x} = \{x=-t,\ t\to\infty, \text{ när } x\to-\infty\}$

$= \frac{1-2t}{t^2}\cdot e^t = \frac{1-2t}{t}\cdot\frac{e^t}{t} \to -2\cdot 0 = 0$ när $x \to \cancel{\infty}\ -\infty$

$f(x) - 0\cdot x = f(x)$ saknar gränsv. när $x \to -\infty$. Ingen asymptot i $-\infty$.

$f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-x} - (2-\frac{1}{x})e^{-x} = e^{-x}(\frac{1}{x^2} - 2 + \frac{1}{x}) =$

$= \frac{-2}{e^x}\,\frac{(x-1)(x+\frac{1}{2})}{x^2}$

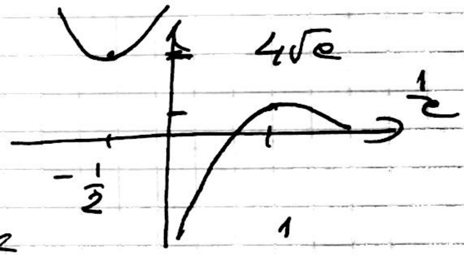


lok min i $-\frac{1}{2}$:

$f(-\frac{1}{2}) = 4\sqrt{e}$

lok max i 1:

$f(1) = \frac{1}{e}$ $\quad (< \sqrt{e}\cdot 4)$



$V_f = (-\infty, \frac{1}{e}] \cup [4\sqrt{e}, \infty)$

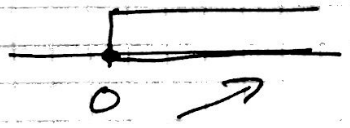
(Konkavitet gör inte att reda ut med kursens metoder)

6. Visa $0 < \ln(x+1) - \frac{2x}{2+x}$, när $x > 0$

Sätter $f(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{2+x}$ def. när $x \geq 0$

Har $f(0) = 0$, Ska visa att $f(0) < f(x)$ när $x > 0$.

$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{4}{(2+x)^2} = \frac{x^2}{(1+x)(x+2)^2}$



f'
f

Ger f strängt väx. på $[0, \infty)$

så $\underset{\underset{0}{\|}}{f(0)} < f(x)$ när $0 < x$

7) $0 < \arctan x - x + \frac{x^3}{3}$ när $x > 0$?

Sätt $f(x) = \arctan x - x + \frac{x^3}{3}$.

Klart $f(0) = 0$.

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 = \frac{x^4}{1+x^2} > 0$ när $x > 0$

Så är f strängt väx. på $[0, \infty)$

och $f(0) = 0 < f(x)$ när $x > 0$.

8) Graf till $f(x) = 2\ln(x+1) + \frac{1}{x}$

Ska ha $x+1 > 0$, $x > -1$. och $x \neq 0$

$D_f = (-1, 0) \cup (0, \infty)$.

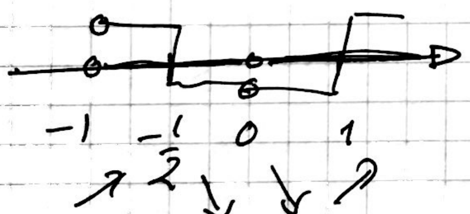
Klart $f(x) \to -\infty$ när $x \to -1^+$ — $x = -1$ asymptot

$f(x) \to \begin{cases} -\infty & \text{när } x \to 0^- \\ \infty & \text{när } x \to 0^+ \end{cases}$ — $x = 0$ asymptot

$\frac{f(x)}{x} = \frac{2\ln(x+1)}{x} + \frac{1}{x^2} \to 0$ när $x \to \infty$

$f(x) - 0 \cdot x = f(x) \to \infty$ när $x \to \infty$ — sned/horisontell saknas.

$f'(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x^2} = \frac{2(x-1)(x+\frac{1}{2})}{(x+1)x^2}$

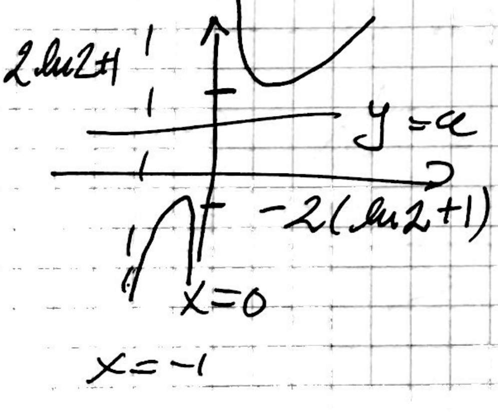


lok max i $-\frac{1}{2}$:

$f(-\frac{1}{2}) = 2\ln(\frac{1}{2}) - 2 = -2(\ln 2 + 1) < 0$

lok min i 1:

$f(1) = 2\ln 2 + 1 > 0$



Svar $a = f(x)$ har

2 lösningar när $a < -2(1+\ln 2)$

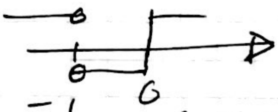
1 när $a = -2(1+\ln 2)$ och

när $a = 2\ln 2 + 1$

Inga a när $-2(\ln 2 + 1) < a < 2\ln 2 + 1$

2 när $a > 2\ln 2 + 1$

9. $f(x) = \arctan(x) - \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ skall ha $\frac{x}{x+1} > 0$



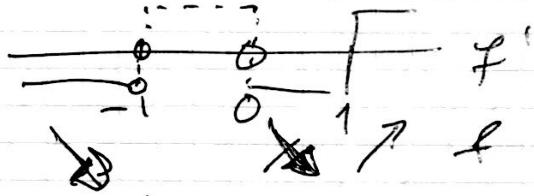
$D_f = (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$.

$f(x) \to \begin{cases} \pi/2 & \text{när } x \to -\infty \\ \pi/2 & \text{när } x \to \infty \end{cases}$ $\quad y = -\pi/2$ asymptot i $-\infty$

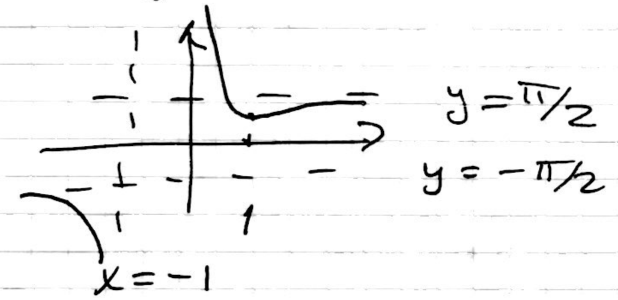
$y = \pi/2$ i ∞.

$f(x) \to \begin{cases} -\infty & \text{när } x \to -1^- \\ \infty & \text{när } x \to 0^+ \end{cases}$ $\quad x = -1$, $x = 0$ asymptoter

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x+1}{x} \cdot \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x(x+1)} = \frac{x-1}{(1+x^2)x(x+1)}$$



lok. min i 1:
$f(1) = \pi/4 + \ln 2 < \frac{\pi}{2}$



$V_f = (-\infty, -\pi/2) \cup (\pi/4 + \ln 2, \infty)$

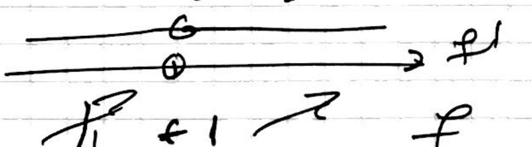
10. $f(x) = e^{-1/(x+1)}$ skall ha $x \neq -1$. $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

$f(x) \to e^0 = 1$ när $x \to \pm\infty$, $\quad y = 1$ asymptot i $\pm\infty$

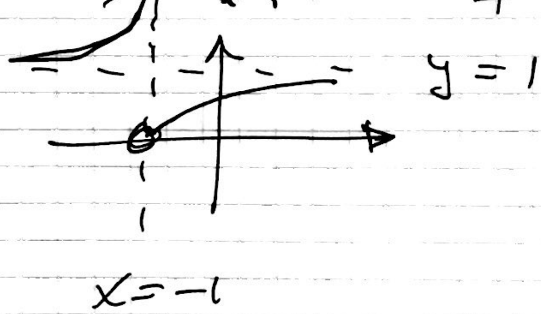
$f(x) \to \infty$ när $x \to -1^-$

$f(x) \to 0$ när $x \to -1^+$ $\quad x = -1$ asymptot.

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \cdot e^{-\frac{1}{1+x}}$$

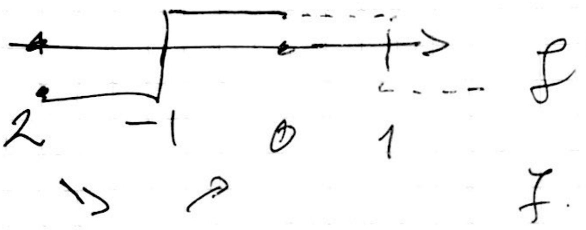


f strängt väx på $(-\infty, -1)$ och $(-1, \infty)$



$V_f = (0, 1) \cup (1, \infty)$

11) $f'(x) = \dfrac{x^2+x+1-x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{-(x-1)(x+1)}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2}$



$f(2) = -\frac{2}{3}$

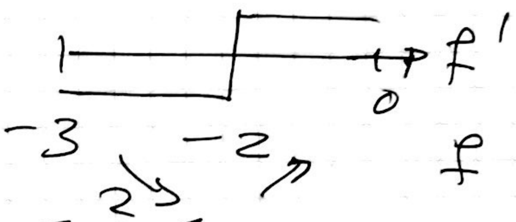
$f(-1) = -1$

$f(0) = 0$

Svar största värdet är 0
minsta är −1

12) $f(x) = \sqrt{x^2+4x+8}$ på $[-3, 0]$

$f'(x) = \dfrac{2x+4}{2\sqrt{(x+2)^2+4}}$



$f(-3) = \sqrt{5}$

$f(-2) = \sqrt{4} = 2$

$f(0) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$2\sqrt{2}$ är $> \sqrt{5}$

$2\sqrt{2} \overset{?}{>} \sqrt{5}$

$4 \cdot 2 \overset{?}{>} 5$ ok!

Svar $2\sqrt{2}$ är största värdet
2 är minsta värdet