

Kap 6: Bevis av sats 8 (s 411)

Sats 8 Antag att W är ett underrum av $\mathbb{R}^n$. Då kan varje $\mathbf{y}$ i $\mathbb{R}^n$ entydigt framställas

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$$

där $\hat{\mathbf{y}}$ ligger i W och $\mathbf{z}$ i ortogonala komplementet till W . Om $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ är en ortogonal bas för underrummet W så gäller

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \dots + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_p}{\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_p} \mathbf{u}_p.$$

Bevis: Låt $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ vara en ortogonal bas för W och definiera $\hat{\mathbf{y}}$ genom

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \dots + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_p}{\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_p} \mathbf{u}_p.$$

Sätt sedan

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}.$$

För varje $j = 1, \dots, p$ gäller då $\mathbf{z} \cdot \mathbf{u}_j = \mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_j - \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u}_j = 0$. Alltså ligger $\mathbf{z}$ i det ortogonala komplementet till W .

För att visa att framställningen är entydig antar vi att vi också har

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}}_1 + \mathbf{z}_1.$$

Detta leder till

$$\hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z} = \hat{\mathbf{y}}_1 + \mathbf{z}_1$$

som i sin tur ger

$$\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}.$$

Detta innebär att $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}_1$ förutom att ligga i W också ligger i ortogonala komplementet till W . Detta ger $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ vilket ger $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ och alltså $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}}_1$ vilket i sin tur också leder till $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}$ så framställningen är entydig.