

Rum med skalärprodukt

Definition (s 444)

En **skalärprodukt** (inre produkt) på ett vektorrum V är en funktion är en regel som till varje par av vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ i V ordnar ett reellt tal $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ som uppfyller

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$
2. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
3. $\langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
4. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ med likhet bara då $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

Definition (s 445)

- **Längden**, eller **normen**, av $\mathbf{u}$ definieras som $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$.
- En **enhetsvektor** är en vektor med längden 1.
- **Avståndet** mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ definieras genom $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.
- Vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ kallas **ortogonala** om $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$

Exempel på skalärprodukt (jfr s 449-451)

På rummet V av styckvis kontinuerliga funktioner på ett intervall $[a, b]$ kan vi definiera en skalärprodukt genom

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt.$$