Lösningsförslag till Tentamen vid Chalmers tekniska högskola i matematik för I, kurskod MVE021, torsdag f.m. 20150416

Del 1: Godkäntdelen

1. (a)

$$\Leftrightarrow (2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -6 & -1 & 3 \\ 7 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

   (b) För HL$= t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och speciellt för $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ finns ∞ med lösningar. Dessa är

$$\boldsymbol{x}=t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t\in\mathbb{R}$$

   För andra HL finns 0 lösningar.

   (c) $\det\boldsymbol{A}=0$.

   (d)

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

   (e)

$$\boldsymbol{A}\sim\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}]$$

$$\dim\mathcal{R}_{\boldsymbol{A}}=\dim\mathcal{K}_{\boldsymbol{A}}=2, \quad \dim\mathcal{N}_{\boldsymbol{A}}=5-2=3\,.$$

   En bas för radrummet är $\boldsymbol{e}_1=[1 \quad 1 \quad 0 \quad 3 \quad 0]^T$ och $\boldsymbol{e}_2=[0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1]^T$.

2. Givet matriserna

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Visa att

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

2p

   (b) Inversen till $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ är

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4p

3. Givet matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

   (a) Bestäm egenvärdena till matrisen. 3p

   (b) Är matrisen $\boldsymbol{A}$ diagonaliserbar? Uträkningar behövs inte. Det räcker att motivera! 3p

4. Betrakta mängden U av de $x\in\mathbb{R}^3$ som uppfyller $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, som uppfyller $x_1-x_2+x_3=0$.

   (a) Visa att U är ett underrum till $\mathbb{R}^3$ och bestäm en ortogonal bas till U. 3p

   (b) Bestäm den vinkelräta projektionen av $\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ på underrummet U. 3p

Överbetygsdelen

5. (a) Förklara varför kolonnerna i matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 9 & 0 \end{bmatrix}$ är linjärt beroende. 2p

   (b) Argumentera/bevisa att för n vektorer $\boldsymbol{v}_j \in \mathbb{R}^m$, $j = 1, 2, ..., n$ med $m < n$, är vektorerna linjärt beroende. 4p

6. Matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ är given.

   (a) Egenvärden är $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = -2$ och egenvektorer till $\boldsymbol{A}$ är

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

   1p

   (b) Lös följande system av differentialekvationer. 5p

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) &+ 3x_1(t) + 4x_2(t) = 0 \end{aligned} \quad , \quad \begin{cases} x_1(0) = 100 \\ x_2(0) = 150 \end{cases}$$

7. Givet en kvadratisk matris $\boldsymbol{A}$ av typ $n \times n$. Bevisa att följande påståenden är ekvivalenta.

   (a) $\boldsymbol{A}^{-1}$ existerar.

   (b) $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.

   (c) $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = n$.

   (d) Matrisekvationen $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har entydig lösning $\boldsymbol{x}$.

   6p