Lösningsförslag till Tentamen för övning, för I-programmet i Linjär algebra, MVE021

1. Givet vektorerna

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

(a) Bilda matrisen $\boldsymbol{A}$ som har *raderna* $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ och $\boldsymbol{v}_3$. Vi får

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

utan radbyte som alltså har rangen 2. Det visar samtidigt att $\boldsymbol{v}3$ är linjäkombination av $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$, d.v.s. span $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}3\} =$ span $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$. Dessa två vektorer utgör en bas för span $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$.

(b) Vi sätter

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1 \text{ och } \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{\boldsymbol{v}_1^T \cdot \boldsymbol{v}_2}{||\boldsymbol{v}_1||^2}\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 13 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

En ortogonal bas är

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}$$

(c) (Bestäm en vektor $\boldsymbol{u}$ vinkelrät mot spannet) Bilda vektorn

$$\boldsymbol{u} := \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(d)

3p, 3p, 1p

2. Givet matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Inversmatrisen till $\boldsymbol{A}$ emd Jacobis metod:

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}] \sim ... \sim \begin{bmatrix} 5 & -7 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1}.$$

(b) Determinanten av $\boldsymbol{A}$: Med en radoperation $R1$ erhålls

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = \{\text{utv. längs kolonn } 1\} = 1 \cdot (3(-1) - 1(-4)) = 1.$$

3p, 2p

3. (a)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =: \boldsymbol{A}'.$$

Alltså är rangen för radrummet 2 eller $\dim \mathcal{R}_{\boldsymbol{A}} = 2$ och $\dim \mathcal{N}_{\boldsymbol{A}} = 4 - 2 = 2$.

(b) En bas för radrummet är

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Och för nollrummet, sätt $\boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Det ger

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{så att } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -3x_3 + 4x_4 \\ -x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

En bas för nollrummet är

$$\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(c) Bestäm $LU-$faktoriseringen...

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vi skriver de gjorda radoperationerna med elementära matriser. Med följande matriser

$$\boldsymbol{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}], \quad \boldsymbol{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

får vi att

$$\boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =: \boldsymbol{U}.$$

Matrisen $\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{E}_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Med dessa två matriser $\boldsymbol{L}$ och $\boldsymbol{U}$ är $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}$

3p, 4p, 6p

4. Givet matrisekvationen $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$,där $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Matrisekvationen saknar lösning ty

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

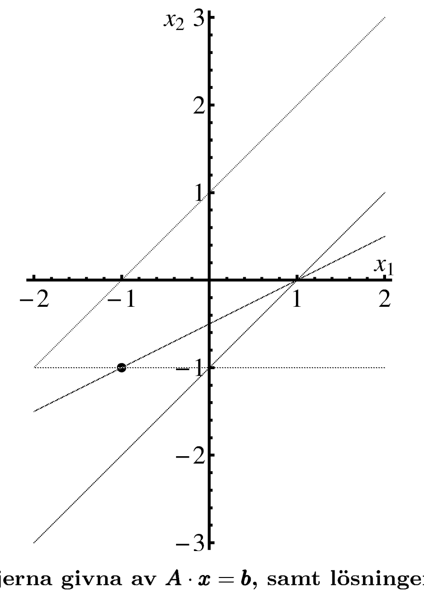
och koefficient- och totalmatris har olika rang.

(b) Lösning ekvationen approximativt med minsta kvadratmetoden:

$\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{b}$ som blir $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(c) Felvektorn ärt

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \eta = \frac{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2 + 2^2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



Linjerna givna av $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, samt lösningen $\hat{\boldsymbol{x}}$

3p, 2p, 2p

5. Lös följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1(t) - 2x_2(t) = x_1'(t) \\ x_2(t) - 2x_1(t) = x_2'(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1(t) = ae^{-t} + be^{3t} \\ x_2(t) = ae^{-t} - be^{3t} \end{cases}$$

5p

6. Giveten symmetrisk matris $\boldsymbol{A}$...

(a) Antag att $\lambda_1 \neq \lambda_2$ för två egenvärden med dito egenvektorer $\boldsymbol{x}_1$ och $\boldsymbol{x}_2$.

$\lambda_1 \boldsymbol{x}_2^T \cdot \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_1^T \cdot \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1^T \cdot \lambda_2 \cdot \boldsymbol{x}_2 = \lambda_2 \cdot \boldsymbol{x}_2^T \cdot \boldsymbol{x}_1$

så att $(\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{x}_2^T \cdot \boldsymbol{x}_1 = 0$. Eftersom $\lambda_1 \neq \lambda_2$ måste $\boldsymbol{x}_2^T \cdot \boldsymbol{x}_1 = 0$, d.v.s. vektorerna är vinkelräta.

(b)

2p, 4p

7. Givet en kvadratisk diagonaliserbar (reell) matris $\boldsymbol{A}$ av ordning n med ett egenvärde λ.

   (a) Definition av begreppet sekularekvation och egenvärde: Givet en kvadratisk matris. Sekularekvationen definieras som

   $$\lambda : \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0.$$

   Ett egenvärde λ är en rot till Sekularekvationen.

   (b) Antag att sekularekvationen kan skrivas $p(\lambda) = \sum_{r=0}^{n} a_r \lambda^r$. Visa att $p(\boldsymbol{A}) = \mathbf{0}$...

   $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{P}^{-1}$, som ger att

   $$\boldsymbol{A}^r = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{D}^r \cdot \boldsymbol{P}^{-1},\ r = 1, 2, ...$$

   Därmed kan polynomet med λ ersatt av $\boldsymbol{A}$ skrivas

   $$\boldsymbol{P} \left(\sum_{r=0}^{n} a_r \boldsymbol{D}^r \right) \boldsymbol{P}^{-1}.$$

   Betrakta matrispolynomet

   $$\sum_{r=0}^{n} a_r \boldsymbol{D}^r$$

   Element i position (j, k) med $j \neq k$ i matrispolynomet är noll. Element i position (j, j) i matrispolynomet är $\sum_{r=1}^{n} a_r \lambda_j^r = 0$ eftersom λ_r är en rot till sekularekvaionen.

2p, 5p