MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Övningstentamen

Hjälpmedel: inga
Datum: Våren 2016
Telefonvakt: Thomas Bäckdahl
ankn 3583

MVE021 Linjär algebra I

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från Maple T. A. räknas in i poängen på denna del, men högsta möjliga poäng är trots det alltid 32. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Förklara vad som menas med en minstakvadratlösning till en ekvation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (1p)
Svar: Definitionsmässigt är $\hat{\mathbf{x}}$ mistakvadratlösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ om $\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\| \leq \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ för alla vektorer $\mathbf{x}$. Dvs. den vektor som minimerar felet $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$.

(b) Anpassa med minsta kvadrat metoden $y = a + bt$ till följande mätdata (4p)

$$\begin{array}{c|cccc} t & -2 & -1 & 0 & 1 \\ \hline y & -1 & 0 & 2 & 3 \end{array}.$$

Lösning: Designmatrisen blir $A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ 1 & t_3 \\ 1 & t_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, mätdata $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

och parametervektorn $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Minstakvadratlösningen $\hat{\mathbf{x}}$ löser normalekvationerna $A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{y}$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix},$$

$$A^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1}A^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 17/10 \\ 7/5 \end{bmatrix}$$

Svar: $a = 17/10$ och $b = 7/5$, alltså $y = \frac{7}{10} + \frac{7}{5}t$ minimerar minstakvadratfelet.

(c) Hur stort blev minstakvadratfelet? (2p)

Lösning: Felvektorn är $A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 17 \\ 31 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|^2 = \frac{(-1)^2+3^2+3^2+1^2}{10^2} = \frac{1}{5}$

Svar: Minstakvadratfelet är $\frac{1}{\sqrt{5}}$. (Kvadratiska medelfelet är $\frac{1}{\sqrt{4}\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$.)

3. Låt $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm en ortogonal bas för $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. (3p)

Lösning: Vi använder Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess. Låt $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$,

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Då är $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ en ortogonal bas för W.

(b) Bestäm ortogonalprojektionen av $\mathbf{u}$ på W. (2p)

Lösning: Ortogonalprojektionen av $\mathbf{u}$ på W är

$$\begin{aligned}
\text{Proj}_W\, \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_3}{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3}\mathbf{u}_3 \\
&= \frac{4}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{6}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{-2}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(c) Bestäm minsta avståndet mellan $\mathbf{u}$ och W. (1p)

Svar: $\|\mathbf{u} - \text{Proj}_W\, \mathbf{u}\| = \| \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$

4. Bestäm med hjälp av diagonalisering A^k för alla heltal $k > 0$ då $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

Lösning: Karakteristiska ekvationen är $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 =$ (5p)
$(-1-\lambda)(3-\lambda)$. Så vi har egenvärden $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 3$, båda med multiplicitet 1. Egenvektorer till λ_1:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x_1 = x_2/2 \Rightarrow \text{ Egenvektor } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Egenvektorer till λ_2:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x_1 = -x_2/2 \Rightarrow \text{ Egenvektor } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Detta ger $A = PDP^{-1}$ med $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. $\det(P) = 2 + 2 = 4$ ger $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. $A^k = PDP^{-1}PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} = PDD \cdots DP^{-1} = PD^kP^{-1} =$
$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2(-1)^k + 2 \cdot 3^k & (-1)^k - 3^k \\ 4(-1)^k - 4 \cdot 3^k & 2(-1)^k + 2 \cdot 3^k \end{bmatrix}$

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

5. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar. (Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Om A är en 3×3 matris så är $\det(3A) = 3\det(A)$. (1p)
Svar: Falskt. Med $A = I$ blir $\det(A) = 1$, men $\det(3A) = 3^3 = 27$.

(b) Om A är en diagonaliserbar $n \times n$ matris så är $\det(A)$ produkten av dess egenvärden räknad med multiplicitet. (1p)
Svar: Sant. $A = PDP^{-1}$ ger $\det(A) = \det(P)\det(D)\det(P^{-1}) = \det(P)\det(D)\dfrac{1}{\det(P)} = \det(D)$ som är produkten av diagonalelementen i D, dvs produkten av egenvärdena.

(c) Om $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är vektorer i $\mathbb{R}^n$ så är $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \mathrm{Proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}) = 0$. (1p)
Svar: Sant. $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \mathrm{Proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}) = \mathbf{b} \cdot \left(\mathbf{a} - \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}\mathbf{b}\right) = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0.$

(d) Om A är en $m \times n$ matris med $m < n$ så har $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oändligt många lösningar. (1p)

Svar: Sant. Matrisen kan maximalt ha ett pivot element per rad, vilket innebär maximalt m pivot kolonner. Alltså finns minst $n - m > 0$ fria variabler. Fria variabler ger oändligt många lösningar.

6. Antag att A är $n \times n$ matris. Bevisa att $\det(A) \neq 0$ om och endast om A är inverterbar. Du behöver inte visa att $\det(EA) = \det(E)\det(A)$ för elementära matriser E. (6p)
Lösning: Radreducera $A \sim B$ utan omskalning, med B på trappstegsform. Detta kan skrivas $A = E_1 \cdots E_p B$, med E_k elementära matriser. $\det(E_k) = 1$ för matriser som motsarar addition av multipel av rad som ligger ovanför på grund av att sådana matriser är triangulära med ettor på diagonalen. $\det(E_k) = -1$ för matriser som motsarar radbyten. $\det(A) = \det(E_1 \cdots E_p B) = \det(E_1) \cdots \det(E_p)\det(B) = \pm\det(B)$, där tecknet beror på hur många radbyten som gjordes. Alltså får vi att $\det(A) = 0$ omm $\det(B) = 0$. A är inverterbar omm B har pivot positioner på varje rad och kolonn, dvs pivot positioner (nollskilldа element) längs hela diagonalen. Då B är triangulär är $\det(B)$ produkten av diagonal elementen, men A är inverterbar omm alla dessa element är nollskillda, dvs produkten är nollskilld. Således får vi att A inverterbar omm $\det(B) \neq 0$ omm $\det(A) \neq 0$.

7. (a) Förklara, med hjälp av ett variabelbyte, hur diagonalisering av en matris leder till den allmänna lösningen av ett system av linjära differentialekvationer. (3p)
Lösning: Om $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ och A är diagonaliserbar, så $A = PDP^{-1}$. Då kan vi introducera nya variabler $\mathbf{y}(t) = P^{-1}\mathbf{x}(t)$. Derivering ger $\mathbf{y}'(t) = P^{-1}\mathbf{x}'(t) = P^{-1}A\mathbf{x}(t) = P^{-1}PDP^{-1}\mathbf{x}(t) = D\mathbf{y}(t)$. Om D är diagonal med $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, blir systemet $\mathbf{y}'(t) = D\mathbf{y}(t)$ särkopplat med allmän lösning $y_k(t) = C_k e^{\lambda_k t}$. Byt tillbaka till $\mathbf{x}(t)$ ger $\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t)$.

(b) Lös följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1'(t) = & 3x_1(t) & - & 2x_2(t) \\ x_2'(t) = & 2x_1(t) & + & 3x_2(t) \end{cases}$$

med begynnelsevillkoren $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 2$. Använd vid behov komplexa tal för beräkningarna, men skriv resultatet på reell form. (5p)

Lösning: Med $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ och $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ blir systemet $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$.

Diagonalisera A. Karakteristiska polynomet är $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2+4 = (3+2i-\lambda)(3-2i-\lambda)$, så egenvärdena blir $\lambda_1 = 3+2i$ och $\lambda_2 = 3-2i = \lambda_1^*$.
Egenvektorer till λ_1:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2i & -2 & 0 \\ 2 & -2i & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{ Egenvektor } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

På grund av att A är reell får vi att $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^*$ är egenvektor till $\lambda_2 = \lambda_1^*$. Detta ger $A = PDP^{-1}$ med $P = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} 3+2i & 0 \\ 0 & 3-2i \end{bmatrix}$.

Låt $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = P^{-1}\mathbf{x}(t)$. Då får vi $\mathbf{y}'(t) = D\mathbf{y}(t)$, dvs $\begin{cases} y_1'(t) = (3+2i)y_1(t) \\ y_2'(t) = (3-2i)y_2(t) \end{cases}$.

De allmänna lösningarna är $\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{(3+2i)t} \\ y_2(t) = C_2 e^{(3-2i)t} \end{cases}$.

Begynnelsevillkoren $P\mathbf{y}(0) = \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ger

$$\left[\begin{array}{cc|c} i & -i & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Dvs $\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ så $C_1 = 1$ och $C_2 = 1$. Det ursprungliga systemets lösning blir

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= P\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(3+2i)t} \\ e^{(3-2i)t} \end{bmatrix} = e^{3t} \begin{bmatrix} ie^{2it} - ie^{-2it} \\ e^{2it} + e^{-2it} \end{bmatrix} \\ &= e^{3t} \begin{bmatrix} i(\cos(2t) + i\sin(2t)) - i(\cos(2t) - i\sin(2t)) \\ \cos(2t) + i\sin(2t) + \cos(2t) - i\sin(2t) \end{bmatrix} = 2e^{3t} \begin{bmatrix} -\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Hoppas det gick bra!
Thomas Bäckdahl

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Finn alla lösningar till ekvationssystemet $\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ -3x - y + 3z = 1 \\ x - 3y - z = 3 \end{cases}$. (3p)

Lösning:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Svar: $x = t$, $y = -1$, $z = t$ där t är en parameter.

(b) Låt $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning i planet som motsvarar spegling i $y = x$. Bestäm standardmatrisen för avbildningen F. (2p)

Lösning: Spegelbilden av $\mathbf{e}_1$ blir $\mathbf{e}_2$ och vice versa.
$F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Svar: $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ med $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) Matriserna $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ är givna.
Lös matrisekvationen $XB - A = X$. (3p)

Lösning: $XB - A = X \Leftrightarrow XB - X = A \Leftrightarrow X(B - I) = A \Leftrightarrow X = A(B - I)^{-1}$ om $(B - I)^{-1}$ existerar.

$$B - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \det(B - I) = -1, \qquad (B - I)^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = A(B - I)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Svar: $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(d) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Lösning: Utveckla efter tredje kolonnen, och sedan efter första raden. (3p)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3\left(\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right) = -3(3 - 4 + 4 - 6) = 9.$$

Svar: 9.

(e) Bestäm för vilka värden på konstanten a som vektorn $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ a \end{bmatrix}$ är en linjärkombination av vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

(3p)

Lösning: Vektorekvationen $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}$ kan skrivas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 8 & a \end{array}\right] \underset{\substack{③-2① \\ \frac{1}{2}②}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 10 & a-10 \end{array}\right] \underset{③+5②}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array}\right].$$

Så ekvationen har lösning omm $a = 5$.

Svar: $\mathbf{u}$ är en linjärkombination av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ omm $a = 5$.