Tentamen för övning, för I-programmet i Linjär algebra, MVE021, vt 2015

Program	I	Kurs	MVE 021
Tentamensdatum	201505xx	Hjälpmedel	Inga
Examinator	Reimond Emanuelsson		

1. Givet vektorerna

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

   (a) Bestäm en bas för span $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$.

   (b) Bestäm en ortogonal bas till span $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$.

   (c) Bestäm en vektor $\boldsymbol{u}$ vinkelrät mot span $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$.

   3p, 3p, 1p

2. Givet matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Beräkna inversmatrisen till $\boldsymbol{A}$

   (b) Beräkna determinanten av $\boldsymbol{A}$.

   3p, 2p

3. Betrakta matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

   (a) Bestäm dimensionen för radrummet $\mathcal{R}_{\boldsymbol{A}}$ och nollrummet $\mathcal{N}_{\boldsymbol{A}}$.

   (b) Bestäm en bas för radrummet $\mathcal{R}_{\boldsymbol{A}}$ och nollrummet $\mathcal{N}_{\boldsymbol{A}}$. Vilka element har de gemensamt?

   (c) Bestäm $LU-$faktoriseringen av $\boldsymbol{A}$.

   3p, 4p, 6p

4. Givet matrisekvationen $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$,där $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Visa att matrisekvationen saknar lösning $\boldsymbol{x}$.

   (b) Lös ekvationen approximativt med minsta kvadratmetoden.

   (c) Beräkna medelfelet.

   3p, 2p, 2p

5. Lös följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1(t) - 2x_2(t) = x_1'(t) \\ x_2(t) - 2x_1(t) = x_2'(t) \end{cases}$$

   5p

6. Givet en symmetrisk matris $\boldsymbol{A}$.

   (a) Bevisa att två egenvektorer till två olika egenvärden är ortogonala.

   (b) Bevisa att matrisens egenvärden är reella.

   2p, 4p

7. Givet en kvadratisk diagonaliserbar (reell) matris $\boldsymbol{A}$ av ordning n med ett egenvärde λ.

   (a) Definiera begreppet sekularekvation och egenvärde.

   (b) Antag att sekularekvationen kan skrivas $p(\lambda) = \sum_{r=0}^{n} a_r \lambda^r = 0$. Visa att $p(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$.

   2p, 5p