

MVE021 Linjär algebra I

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från Maple T. A. räknas in i poängen på denna del, men högsta möjliga poäng är trots det alltid 32. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Förklara vad som menas med en minstakvadratlösning till en ekvation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (1p)

(b) Anpassa med minsta kvadrat metoden $y = a + bt$ till följande mätdata

$$\begin{array}{c|cccc} t & -2 & -1 & 0 & 1 \\ \hline y & -1 & 0 & 2 & 3 \end{array}.$$

(4p)

- (c) Hur stort blev minstakvadratfelet? (2p)

3. Låt $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

- (a) Bestäm en ortogonal bas för $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. (3p)

- (b) Bestäm ortogonalprojektionen av $\mathbf{u}$ på W . (2p)

- (c) Bestäm minsta avståndet mellan $\mathbf{u}$ och W . (1p)

4. Bestäm med hjälp av diagonalisering A^k för alla heltal $k > 0$ då $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$. (5p)
- VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

5. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar.

(Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Om A är en 3×3 matris så är $\det(3A) = 3 \det(A)$. (1p)

(b) Om A är en diagonaliserbar $n \times n$ matris så är $\det(A)$ produkten av dess egenvärden räknad med multiplicitet. (1p)

(c) Om $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är vektorer i $\mathbb{R}^n$ så är $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \text{Proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}) = 0$. (1p)

(d) Om A är en $m \times n$ matris med $m < n$ så har $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oändligt många lösningar. (1p)

6. Antag att A är $n \times n$ matris. Bevisa att $\det(A) \neq 0$ om och endast om A är inverterbar.

Du behöver inte visa att $\det(EA) = \det(E)\det(A)$ för elementära matriser E . (6p)

7. (a) Förklara, med hjälp av ett variabelbyte, hur diagonalisering av en matris leder till den allmänna lösningen av ett system av linjära differentialekvationer. (3p)

(b) Lös följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t) \end{cases}$$

med begynnelsevillkoren $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 2$. Använd vid behov komplexa tal för beräkningarna, men skriv resultatet på reell form. (5p)

Lycka till!
Thomas Bäckdahl

Anonym kod	MVE021 Linjär algebra I Våren 2016	sid.nummer 1	Poäng
------------	---	------------------------	-------

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Finn alla lösningar till ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ -3x - y + 3z = 1 \\ x - 3y - z = 3 \end{cases} . \quad (3p)$$

Lösning:

Svar:

- (b) Låt $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning i planet som motsvarar spegling i $y = x$. Bestäm standardmatrisen för avbildningen F . (2p)

Lösning:

Svar:

- (c) Matriserna $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ är givna.

Lös matrisekvationen $XB - A = X$.

(3p)

Lösning:

Svar:

VÄND!

(d) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$

Lösning:

(3p)

Svar:

- (e) Bestäm för vilka värden på konstanten a som vektorn $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ a \end{bmatrix}$ är en linjärkombination av vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

(3p)

Svar: