

Tillämpningar av komplex analys och Fourieranalys

Kjell Holmåker

Matematiska institutionen
Chalmers Tekniska Högskola och Göteborgs Universitet
412 96 Göteborg
1994, 2009

Förord

Detta kompendium innehåller en del kompletterande material till kursböckerna Fisher, Complex variables, och Folland, Fourier analysis and its applications, i kurserna Komplex matematisk analys och Fourieranalys. Bland tillämpningsområdena märks elektriska nät och icke-stationära förlopp analyserade med Laplacetransform. Vidare behandlas allmänna linjära system. Avsnitten 1-4 är tänkta att ingå i kursen Komplex matematisk analys, medan avsnitt 5 hör till kursen i Fourieranalys.

Innehåll

1	Beräkning av reella integraler	5
1.1	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$	5
1.2	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos ax dx$ och $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin ax dx$	6
2	Möbiusavbildningar och inversa punkter	11
3	Laplacetransformer	14
4	Elektriska nät och linjära system	19
4.1	Icke-stationära förlopp i elektriska nät analyserade med Laplacetransformer	19
4.2	Linjära system	26
	Kausalitet	29
	Stabilitet	30
	Övningsexempel	36
5	Samplingsteoremet	39

1. Beräkning av reella integraler

Residukalkyl kan användas för att beräkna diverse reella integraler av intresse. Vi skall här se på några vanliga typer.

1.1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

Låt $P(z)$ och $Q(z)$ vara två polynom utan gemensamma faktorer. Antag att Q saknar reella nollställen och att $\text{grad } Q \geq \text{grad } P + 2$ (där $\text{grad } P$ och $\text{grad } Q$ betecknar polynomens gradtal), så att integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ är konvergent, ja t.o.m. absolutkonvergent. Integrera $P(z)/Q(z)$ runt halvcirkeln i Fig. 1, där R har valts så stort att konturen omsluter alla nollställen till $Q(z)$ i övre halvplanet. Enligt residusatsen är

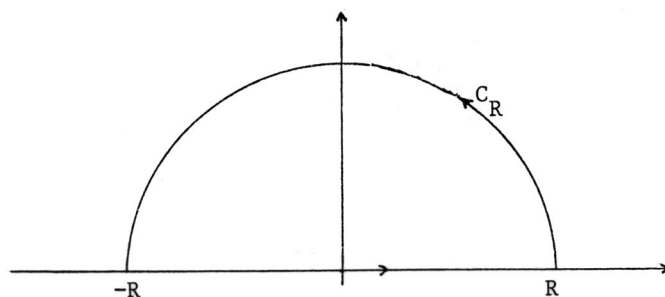


Fig. 1

$$\int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} dx + \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } z > 0} \text{Res} \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad (1.1)$$

där summan i högerledet förstås betyder summan av residuerna av $P(z)/Q(z)$ i alla poler i övre halvplanet. Vi vill nu låta $R \rightarrow \infty$ och visa att den andra integralen i (1.1) går mot 0. Detta följer av följande lemma.

Lemma 1.1. *Antag att $f(z)$ är analytisk i $\text{Im } z \geq 0$, $|z| > R_0$ för något R_0 , och att $zf(z) \rightarrow 0$ då $z \rightarrow \infty$ i halvplanet $\text{Im } z \geq 0$. Då är*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

Bevis. Antag $R > R_0$ och sätt $M_R = \max_{z \in C_R} |f(z)|$. Förutsättningen att $zf(z) \rightarrow 0$ då $z \rightarrow \infty$ i $\text{Im } z \geq 0$ innebär att $RM_R \rightarrow 0$ då $R \rightarrow \infty$. Vi får

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |f(z)| |dz| \leq M_R \cdot \pi R \rightarrow 0 \quad \text{då} \quad R \rightarrow \infty,$$

varför påståendet följer. $\square$

Tillämpa nu Lemma 1.1 på $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. Om $P(z) = a_m z^m + \dots + a_1 z + a_0$ och $Q(z) = b_p z^p + \dots + b_1 z + b_0$, så är $m + 1 < p$ enligt förutsättning, och

$$zf(z) = \frac{a_m z^{m+1} + \dots + a_0 z}{b_p z^p + \dots + b_0} \rightarrow 0 \quad \text{då} \quad z \rightarrow \infty.$$

Alltså är $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$. Låt $R \rightarrow \infty$ i (1.1) så fås

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } z > 0} \text{Res} \frac{P(z)}{Q(z)}. \quad (1.2)$$

Exempel. Beräkna $I = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx$.

Lösning. Integranden är jämn så $I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx$. Funktionen $f(z) = \frac{z^2}{z^4+1}$ har poler då $z^4 + 1 = 0$, $z = z_k = e^{i(2k+1)\pi/4}$, $k = 0, 1, 2, 3$. I övre halvplanet ligger $z_0 = e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ och $z_1 = e^{3i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$. Vi har

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z=z_0} f(z) &= \frac{z^2}{4z^3} \Big|_{z=z_0} = \frac{1}{4z_0} = \frac{\bar{z}_0}{4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-i), \\ \text{Res}_{z=z_1} f(z) &= \frac{1}{4z_1} = \frac{\bar{z}_1}{4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(-1-i). \end{aligned}$$

Formel (1.2) ger

$$I = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-i-1-i) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

1.2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos ax \, dx$ och $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin ax \, dx$

Låt $P(z)$ och $Q(z)$ vara som i 1.1 med det undantaget att vi nu bara kräver att $\text{grad } Q \geq \text{grad } P + 1$. Låt $a > 0$ och integrera $\frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz}$ runt samma kontur som förut. Residusatsen ger

$$\int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} e^{iax} dx + \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz} dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } z > 0} \text{Res} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz} \quad (1.3)$$

för stora R . Eftersom $|e^{iaz}| = e^{-ay} \leq 1$ ($z = x + iy$), kan den andra integralen i (1.3) uppskattas som

$$\left| \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz} dz \right| \leq \int_{C_R} \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| |dz|.$$

Om skillnaden mellan Q :s och P :s gradtal är minst två enheter går detta mot noll som förut, men om skillnaden i gradtal bara är en enhet, är denna uppskattning värdelös, och vi måste hitta på något bättre. Lösningen ges av följande lemma.

Lemma 1.2 (Jordans lemma). (a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \sin \theta} d\theta < \frac{\pi}{2aR}$, $a > 0$.

(b) Antag att $f(z)$ är analytisk i $\text{Im } z \geq 0$, $|z| > R_0$ för något R_0 , och att $f(z) \rightarrow 0$ då $z \rightarrow \infty$ i halvplanet $\text{Im } z \geq 0$. Om $a > 0$, så är

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0.$$

Bevis. (a) Det framgår av Fig. 2 att $\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$ för $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

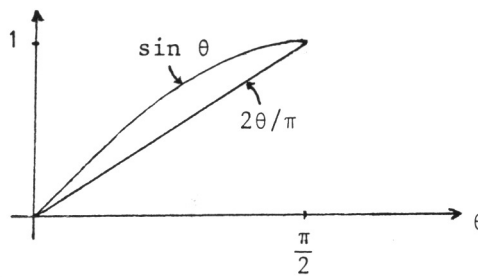


Fig. 2

Detta ger

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \sin \theta} d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR(2\theta/\pi)} d\theta < \int_0^{\infty} e^{-2aR\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi}{2aR}.$$

(b) Antag $R > R_0$ och låt igen $M_R = \max_{z \in C_R} |f(z)|$. Förutsättningen att $f(z) \rightarrow 0$ då $z \rightarrow \infty$ i $\text{Im } z \geq 0$ innebär att $M_R \rightarrow 0$ då $R \rightarrow \infty$. Vi uppskattar integralen över C_R och utnyttjar (a):

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz \right| &\leq [z = Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi] \leq M_R \int_0^{\pi} e^{-aR \sin \theta} R d\theta \\ &= [\sin \theta \text{ är jämn kring } \theta = \frac{\pi}{2}] = 2RM_R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \sin \theta} d\theta \\ &< 2RM_R \cdot \frac{\pi}{2aR} = \frac{\pi}{a} M_R \rightarrow 0, \quad \text{då } R \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

vilket bevisar påståendet. □

Låt oss återvända till (1.3) och tillämpa Lemma 1.2 på $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. Eftersom $m < p$, gäller att

$$f(z) = \frac{a_m z^m + \dots + a_0}{b_p z^p + \dots + b_0} \rightarrow 0 \quad \text{då } z \rightarrow \infty,$$

och Lemma 1.2 ger att $\int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz \rightarrow 0$ då $R \rightarrow \infty$. Låt $R \rightarrow \infty$ i (1.3) så fås då

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } z > 0} \text{Res} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz} \quad (a > 0). \quad (1.4)$$

Integralen i (1.4) har erhållits som ett principalvärde, dvs. som

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{iax} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} e^{iax} dx,$$

men det är inte klart att integralen är konvergent i vanlig mening, vilket kräver att $\int_{-A}^B \frac{P(x)}{Q(x)} e^{iax} dx$ har ett gränsvärde då A och B går mot ∞ oberoende av varandra. (För att klargöra skillnaden, observera att t.ex. $\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} x dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R x dx = 0$, medan $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$ inte existerar.) I (1.2) var detta inget problem, eftersom vi från början visste att integralen var konvergent. Att detsamma gäller i (1.4) kan visas genom att använda en annan integrationskontur eller direkt genom partialintegration. Med $R(x) = P(x)/Q(x)$ fås

$$\int_{-A}^B R(x) e^{iax} dx = \left[R(x) \frac{e^{iax}}{ia} \right]_{-A}^B - \frac{1}{ia} \int_{-A}^B R'(x) e^{iax} dx. \quad (1.5)$$

Den utintegrerade termen går mot 0 då A och B går mot ∞ . Eftersom $R'(x)$ är en rationell funktion $P_1(x)/Q_1(x)$, där $\text{grad } Q_1 \geq \text{grad } P_1 + 2$, så är $\int_{-\infty}^{\infty} R'(x) e^{iax} dx$ absolutkonvergent, och integralen i högerledet av (1.5) har ett gränsvärde då A och $B \rightarrow \infty$ oberoende av varandra. Alltså gäller detsamma för vänsterledet, och vi behöver inte ha något "PV" i (1.4).

Om P och Q har reella koefficienter får vi $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos ax dx$ och $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin ax dx$ genom att ta real- resp. imaginärdelen av båda leden i (1.4). Observera att man inte kan få t. ex. $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos ax dx$ genom att integrera $R(z) \cos az$ runt konturen i Fig. 1 (varför?), utan man måste gå vägen via (1.4).

Exempel. Beräkna $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 2x + 2} dx$.

Lösning. Vi skriver $I = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 2x + 2} dx$.

Funktionen $f(z) = e^{iz}/(z^2 + 2z + 2)$ har poler då $z^2 + 2z + 2 = 0$, $z = -1 \pm i$. I övre halvplanet ligger $z_1 = -1 + i$, och vi har

$$\text{Res}_{z=z_1} f(z) = \left. \frac{e^{iz}}{2z + 2} \right|_{z=z_1} = \frac{e^{i(-1+i)}}{2i} = \frac{1}{2i} e^{-1-i}.$$

Formel (1.4) ger

$$I = \text{Im}(2\pi i \cdot \frac{1}{2i} e^{-1-i}) = \underline{\underline{-\frac{\pi}{e} \sin 1}}.$$

Vi skall nu tillåta att Q kan ha enkla nollställen på realaxeln och se hur (1.4) generaliseras. Vi måste först diskutera begreppet principalvärde litet utförligare. Om en funktion $f(x)$ är kontinuerlig i intervallet $[a, b]$ utom i punkten c , definierar vi

$$\text{PV} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left\{ \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \right\},$$

om gränsvärdet existerar. Exempelvis är

$$\text{PV} \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left[\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x} \right] = 0,$$

medan $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ naturligtvis är divergent.

Flera principalvärden kan kombineras på ett uppenbart sätt.

Exempel.

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon_1 \rightarrow 0+ \\ \epsilon_2 \rightarrow 0+}} \left[\int_{-R}^{-1-\epsilon_1} + \int_{-1+\epsilon_1}^{1-\epsilon_2} + \int_{1+\epsilon_2}^R \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right) dx \right] = 0.$$

Om Q har ett antal enkla reella nollställen och om förutsättningarna i övrigt är de samma som i anslutning till (1.4), får vi

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } z > 0} \text{Res} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz} + \pi i \sum_{\text{Im } z = 0} \text{Res} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz}. \quad (1.6)$$

Observera att "PV" är helt nödvändigt här, eftersom integralen är divergent.

I beviset kommer vi att utnyttja följande resultat.

Lemma 1.3. Om $f(z)$ har en enkelpol i z_0 , och om C_ϵ är cirkelbågen $z = z_0 + \epsilon e^{i\theta}$, $\alpha \xrightarrow{\theta} \alpha + \theta_0$, så är

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} f(z) dz = i\theta_0 \text{Res}_{z=z_0} f(z).$$

Bevis. Vi kan skriva

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \varphi(z)$$

där $c_{-1} = \text{Res}_{z=z_0} f(z)$, och där $\varphi(z)$ är analytisk i z_0 , så att

$$\int_{C_\epsilon} f(z) dz = c_{-1} \int_{C_\epsilon} \frac{1}{z - z_0} dz + \int_{C_\epsilon} \varphi(z) dz. \quad (1.7)$$

Här är

$$\int_{C_\epsilon} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_{\alpha}^{\alpha + \theta_0} \frac{1}{\epsilon e^{i\theta}} \epsilon i e^{i\theta} d\theta = i \int_{\alpha}^{\alpha + \theta_0} d\theta = i\theta_0,$$

medan

$$\left| \int_{C_\epsilon} \varphi(z) dz \right| \leq \max_{z \in C_\epsilon} |\varphi(z)| \cdot |\theta_0| \epsilon \rightarrow 0 \quad \text{då} \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

Låt $\epsilon \rightarrow 0$ i (1.7) så fås påståendet. □

För att bevisa (1.6) låt $g(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}e^{iaz}$ och låt $x_1, \dots, x_m$ vara polerna på realaxeln. Integrera $g(z)$ runt konturen i Fig. 3.

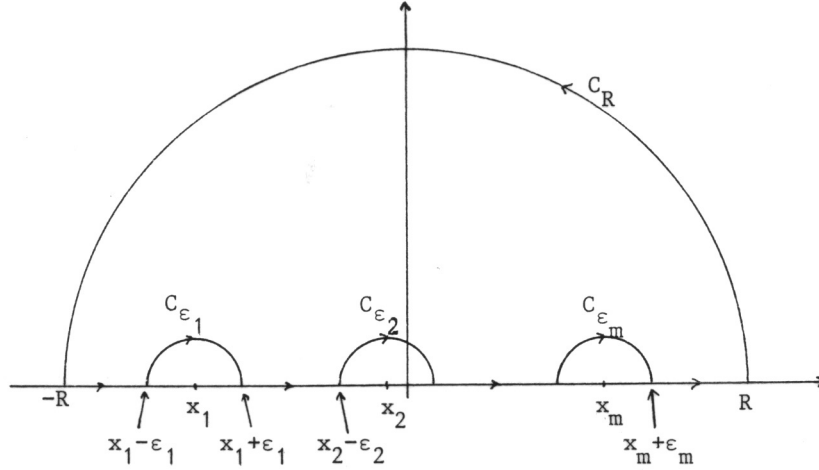


Fig. 3

Om R är stort och $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$ små, är

$$\begin{aligned} \int_{C_R} g(z) dz + \int_{-R}^{x_1 - \epsilon_1} g(x) dx + \int_{x_1 + \epsilon_1}^{x_2 - \epsilon_2} g(x) dx + \dots + \int_{x_m + \epsilon_m}^R g(x) dx + \\ + \int_{C_{\epsilon_1}} g(z) dz + \dots + \int_{C_{\epsilon_m}} g(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } z > 0} \text{Res } g(z). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Vi får att $\int_{C_R} g(z) dz \rightarrow 0$ då $R \rightarrow \infty$ som förut, och enligt Lemma 1.3 gäller att

$$\int_{C_{\epsilon_k}} g(z) dz \rightarrow -\pi i \text{Res}_{z=x_k} g(z) \quad \text{då } \epsilon_k \rightarrow 0, k = 1, \dots, m.$$

Låt $R \rightarrow \infty$ och $\epsilon_k \rightarrow 0$, $k = 1, \dots, m$, i (1.8) så erhålles (1.6). $\square$

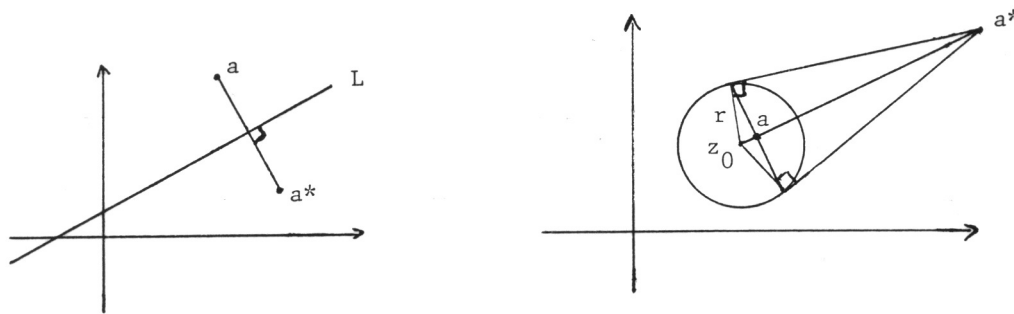
Formel (1.6) används oftast för att beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos ax dx$ eller $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin ax dx$, där de reella nollställena till $Q(x)$ motsvaras av nollställen till $\cos ax$ eller $\sin ax$. Integranden är då (kan uppfattas som) kontinuerlig i dessa punkter, så något principalvärde behövs inte. Konvergens i oändligheten är heller inget problem, som vi såg i (1.5).

Exempel.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \text{Im PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \text{Im} \left(\pi i \text{Res}_{z=0} \frac{e^{iz}}{z} \right) = \frac{1}{2} \text{Im}(\pi i \cdot 1) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2. Möbiusavbildningar och inversa punkter

Definition. Två punkter a och a^* kallas *inversa m.a.p. linjen L* , om de är varandras spegelbilder i L . Punkterna a och a^* kallas *inversa m.a.p. cirkeln $|z - z_0| = r$* , om a och a^* ligger på samma förlängda radie och $|a - z_0| \cdot |a^* - z_0| = r^2$, dvs. om $(a - z_0)(a^* - z_0) = r^2$. Vidare är z_0 och ∞ inversa m.a.p. cirkeln.



Låt C vara en cirkel eller rät linje och $T(z)$ en Möbiusavbildning. Då är som bekant bildkurvan $C' = T(C)$ också en cirkel eller rät linje.

Sats 2.1. Antag att a och a^* är inversa m.a.p. C . Då är $T(a)$ och $T(a^*)$ inversa m.a.p. C' .

Beviset bygger på två lemmor.

Lemma 2.1. Låt C vara en cirkel eller rät linje och låt a och a^* ($a, a^* \neq \infty$) vara inversa m.a.p. C . Då är

$$\left| \frac{z - a}{z - a^*} \right| = k, \quad z \in C,$$

där $k = 1$ då C är en rät linje, och $k = |a - z_0|/r$ då C är cirkeln $|z - z_0| = r$.

Bevis. Uppenbart från definitionen då C är en rät linje. Om C är cirkeln $|z - z_0| = r$, kan vi skriva

$$a = z_0 + \rho e^{i\varphi}, \quad a^* = z_0 + \frac{r^2}{\rho} e^{i\varphi}, \quad \text{där} \quad \rho = |a - z_0|.$$

Punkterna på C är av formen $z = z_0 + r e^{i\theta}$. Då gäller

$$\begin{aligned} \frac{z - a}{z - a^*} &= \frac{r e^{i\theta} - \rho e^{i\varphi}}{r e^{i\theta} - \frac{r^2}{\rho} e^{i\varphi}} = \frac{\rho r e^{i\theta} - \rho e^{i\varphi}}{r \rho e^{i\theta} - r e^{i\varphi}} = \\ &= -\frac{\rho}{r} e^{i\theta} e^{i\varphi} \frac{\rho e^{-i\theta} - r e^{-i\varphi}}{\rho e^{i\theta} - r e^{i\varphi}}. \end{aligned}$$

I det sista bråket är täljaren konjugatet av nämnaren, varför bråkets belopp är 1. Alltså är

$$\left| \frac{z - a}{z - a^*} \right| = \frac{\rho}{r}.$$

□

Lemma 2.2. Låt p och q vara olika komplexa tal och $k > 0$. Ekvationen

$$\left| \frac{z - p}{z - q} \right| = k \quad (2.1)$$

betyder en rät linje då $k = 1$ och en cirkel med medelpunkt $z_0 = (p - k^2q)/(1 - k^2)$ och radie $r = k|p - q|/|1 - k^2|$ då $k \neq 1$. p och q är inversa punkter m.a.p. linjen resp. cirkeln.

Bevis. Påståendet är klart om $k = 1$, så låt $k \neq 1$. Ekvation (2.1) kan skrivas

$$\begin{aligned} (z - p)(\bar{z} - \bar{p}) &= k^2(z - q)(\bar{z} - \bar{q}), \\ (1 - k^2)z\bar{z} - (\bar{p} - k^2\bar{q})z - (p - k^2q)\bar{z} &= k^2|q|^2 - |p|^2, \\ z\bar{z} - \bar{z}_0z - z_0\bar{z} &= \frac{k^2|q|^2 - |p|^2}{1 - k^2}, \\ |z - z_0|^2 &= z\bar{z} - \bar{z}_0z - z_0\bar{z} + z_0\bar{z}_0 = \frac{k^2|q|^2 - |p|^2}{1 - k^2} + |z_0|^2. \end{aligned}$$

Efter litet räknande fås att det sista uttrycket är lika med r^2 , och därmed är det första påståendet klart. Slutligen är

$$\begin{aligned} p - z_0 &= \frac{k^2(q - p)}{1 - k^2}, \quad q - z_0 = \frac{q - p}{1 - k^2}, \\ (p - z_0)\overline{(q - z_0)} &= r^2, \end{aligned}$$

vilket visar påståendet om inversa punkter. □

Bevis av Sats 2.1. Avbildningen $T(z)$ kan skrivas som en sammansättning av avbildningar av formen $T_1(z) = \alpha z + \beta$, $\alpha \neq 0$, och $T_2(z) = \frac{1}{z}$. Därför räcker det att visa påståendet för var och en av dessa avbildningar.

Antag först att $a, a^* \neq \infty$. Enligt Lemma 2.1 och Lemma 2.2 kan ekvationen för C skrivas på formen

$$\left| \frac{z - a}{z - a^*} \right| = k. \quad (2.2)$$

Om $w = T_1(z) = \alpha z + \beta$ och $z \in C$, är enligt (2.2)

$$\left| \frac{w - T_1(a)}{w - T_1(a^*)} \right| = \left| \frac{\alpha z + \beta - (\alpha a + \beta)}{\alpha z + \beta - (\alpha a^* + \beta)} \right| = \left| \frac{z - a}{z - a^*} \right| = k.$$

Enligt Lemma 2.2 är då $T_1(a)$ och $T_1(a^*)$ inversa m.a.p. $T_1(C)$. Om $w = T_2(z) = \frac{1}{z}$ och $z \in C$, är, om $a, a^* \neq 0$,

$$\left| \frac{w - T_2(a)}{w - T_2(a^*)} \right| = \left| \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{z} - \frac{1}{a^*}} \right| = \left| \frac{a^*}{a} \right| \left| \frac{z - a}{z - a^*} \right| = \frac{k|a^*|}{|a|},$$

och Lemma 2.2 visar att $T_2(a)$ och $T_2(a^*)$ är inversa m.a.p. $T_2(C)$. Om $a = 0$, är

$$|w - T_2(a^*)| = \left| \frac{1}{z} - \frac{1}{a^*} \right| = \frac{1}{|a^*|} \left| \frac{z - a^*}{z} \right| = \frac{1}{k|a^*|},$$

vilket visar att bilden är en cirkel med $T_2(a^*)$ och $T_2(a) = \infty$ som inversa punkter. Fallet $a^* = 0$ behandlas analogt.

Om $a = \infty$, är $a^* = z_0$, om C är cirkeln $|z - z_0| = r$. Då är $T_1(a) = \infty$ och $T_1(a^*) = \alpha z_0 + \beta$ inversa m.a.p. $T_1(C)$, eftersom cirkeln $T_1(C)$ har medelpunkten $\alpha z_0 + \beta$. Vidare är $T_2(a) = 0$ och $T_2(a^*) = \frac{1}{z_0}$ inversa m.a.p. $T_2(C)$. Detta är klart om $z_0 = 0$, och om $z_0 \neq 0$ är för $z \in C$

$$\left| \frac{T_2(z) - 0}{T_2(z) - \frac{1}{z_0}} \right| = \left| \frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}} \right| = \frac{|z_0|}{|z - z_0|} = \frac{|z_0|}{r},$$

och påståendet följer av ännu en tillämpning av Lemma 2.2. Fallet $a = z_0$, $a^* = \infty$ behandlas analogt. Därmed är satsen bevisad. $\square$

Sats 2.1 kan användas för att enkelt lösa vissa avbildningsproblem.

Problem 1. Avbilda en cirkel eller rät linje C på en cirkel eller rät linje C' .

Lösning. Problemet kan lösas genom att man avbildar en punkt $z_1 \in C$ på en punkt $w_1 \in C'$ och ett par av inversa (m.a.p. C) punkter z_2 och z_2^* (som ej ligger på C) på ett par av inversa (m.a.p. C') punkter w_2 och w_2^* . Dessa punkter bestämmer en Möbiusavbildning $T(z)$; se Fisher, sid. 198-199 för det grundläggande problemet att avbilda tre punkter på tre punkter. Bilden $T(C)$ av C är en cirkel eller rät linje, som går genom w_1 och som har w_2 och w_2^* som inversa punkter (Sats 2.1). Nu finns det bara en cirkel eller rät linje med denna egenskap. Detta kan man inse genom att införa den Möbiusavbildning $\zeta = S(w)$, som avbildar w_1 på 1, w_2 på 0 och w_2^* på ∞ . Bilderna av $T(C)$ och C' är då cirklar, som går genom 1 och som har 0 och ∞ som inversa punkter. Det finns dock bara en sådan cirkel, nämligen $|\zeta| = 1$. Alltså $ST(C) = S(C')$, varför $T(C) = C'$.

Problem 2. Avbilda ett område Ω begränsat av en cirkel eller rät linje C på ett område Ω' begränsat av en cirkel eller rät linje C' .

Lösning. Avbilda C på C' enligt Problem 1 så att någon punkt i Ω avbildas på någon punkt i Ω' . Därvid kommer Ω att avbildas på Ω' ; se Fisher, övn. 10, sid. 205.

3. Laplacetransformer

I vissa tillämpningar har vi behov av att kunna Laplacetransformera (generaliserade) funktioner innehållande impulsiva singulariteter, dvs. δ -”funktioner” och eventuellt derivator av sådana. Detta är ganska problemfritt utom då vi har en impulsiv singularitet i origo. Vi tänker oss som vanligt att $f(t) = 0$ för $t < 0$ och definierar

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\epsilon}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

under förutsättning att integralen existerar för s med tillräckligt stor realdel. Exempelvis är

$$(\mathcal{L}\delta)(s) = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = e^{-s0} = 1.$$

δ -funktioner kan uppträda i högerledet i differentialekvationer. Ett enkelt exempel:

$$u'' + u = \delta(t). \quad (3.1)$$

En sådan ekvation måste tolkas inom teorin för generaliserade funktioner (eller distributioner), och derivatorna måste avse generaliserade derivator. Låt oss söka en lösning sådan att $u(t) = 0$ för $t < 0$ och försöka bestämma den med Laplacetransformering. Vi behöver då regeln för Laplacetransformering av derivator. Med generaliserad derivata och med $f(t) = 0$ för $t < 0$ har vi

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}f')(s) &= \int_{0^-}^{\infty} f'(t)e^{-st}dt = [f(t)e^{-st}]_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} f(t)(-s)e^{-st}dt \\ &= s \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt, \end{aligned}$$

dvs.

$$(\mathcal{L}f')(s) = s(\mathcal{L}f)(s). \quad (3.2)$$

Analogt för högre derivator:

$$(\mathcal{L}f^{(k)})(s) = s^k(\mathcal{L}f)(s).$$

Laplacetransformerar vi nu (3.1) får vi med $U(s) = \mathcal{L}u(s)$:

$$\begin{aligned} s^2U(s) + U(s) &= 1, \quad U(s) = \frac{1}{1+s^2}, \\ u(t) &= \sin t \cdot \theta(t). \end{aligned}$$

Jämför (3.2) med den tidigare formeln (se Fisher, Example 2, sid. 348, eller Folland, Theorem 8.1(c))

$$(\mathcal{L}f')(s) = s\mathcal{L}f(s) - f(0), \quad (3.3)$$

där $f'(t)$ är den styckvisa derivatan för $t \geq 0$. Ett enkelt exempel belyser skillnaden i synsätt mellan (3.2) och (3.3). Betrakta $f(t) = \theta(t) (= H(t))$. I (3.3) betraktar vi enbart $t \geq 0$ och har $\theta'(t) = 0$ och $\theta(0) = \theta(0^+) = 1$. Alltså utsäger (3.3)

$$(\mathcal{L}\theta')(s) = 0 = s\mathcal{L}\theta(s) - 1,$$

vilket är korrekt, ty $\mathcal{L}\theta(s) = \frac{1}{s}$. I (3.2) tar vi hänsyn till $t < 0$ och har $\theta'(t) = \delta(t)$, varvid (3.2) ger

$$(\mathcal{L}\theta')(s) = \mathcal{L}\delta(s) = 1 = s\mathcal{L}\theta(s),$$

vilket också är korrekt.

Vi har tidigare sett hur en given funktion $f(t)$ kan återvinnas ur sin Laplacetransform genom en viss konturintegral, som vi kallar inversionsintegralen. Nu är situationen ofta den motsatta: vi har en funktion $F(s)$ given och vi vill ta reda på om $F(s)$ är Laplacetransformen av någon funktion $f(t)$. Förhoppningen är att $f(t)$ skall kunna erhållas med hjälp av inversionsintegralen, men det är tyvärr inte alltid sant; det kan nämligen hända att inversionsintegralen konvergerar mot en funktion, som inte har $F(s)$ som sin Laplacetransform (se Folland, Exercise 10, sid. 273). Med lämpliga förutsättningar på $F(s)$ kan man dock få det önskade resultatet. Vi skall nedan ge två exempel på situationer, där $F(s)$ verkligen är Laplacetransformen av den funktion $f(t)$ som erhålles ur inversionsintegralen. Först kan man fråga sig vilka funktioner $F(s)$ som kan uppträda som Laplacetransformer. Det är inte lätt att ge något enkelt svar på den frågan. Ett par egenskaper hos Laplacetransformer kan vi dock notera. Vi har tidigare sett att en Laplacetransform är analytisk i ett halvplan $\operatorname{Re} s > a$. En annan enkel egenskap ges i följande sats. Vi betraktar där funktioner $f(t)$ utan impulsdelar.

Sats 3.1. *Låt $f(t)$ vara sådan att $e^{-pt}|f(t)|$ är integrerbar över intervallet $(0, \infty)$ för någon reell konstant p . Då gäller för Laplacetransformen $F(s)$ att $F(s) \rightarrow 0$ då $\operatorname{Re} s \rightarrow \infty$.*

Bevis. Antag $\sigma = \operatorname{Re} s > p$. Då är

$$|F(s)| \leq \int_0^\infty |f(t)|e^{-pt}e^{-(\sigma-p)t}dt.$$

För varje $\varepsilon > 0$ kan vi välja ett $t_0 > 0$ så att $\int_0^{t_0} |f(t)|e^{-pt}dt < \varepsilon$. Vi har

$$|F(s)| \leq \int_0^{t_0} |f(t)|e^{-pt}dt + e^{-(\sigma-p)t_0} \int_{t_0}^\infty |f(t)|e^{-pt}dt \leq \varepsilon + e^{-(\sigma-p)t_0} \int_0^\infty |f(t)|e^{-pt}dt,$$

och detta kan göras mindre än 2ε om σ väljs tillräckligt stort. Alltså gäller att $F(s) \rightarrow 0$ då $\operatorname{Re} s \rightarrow \infty$. $\square$

Sats 3.2. Antag att $g(s)$ är analytisk i hela s -planet utom i ändligt många singulära punkter s_k , och att $g(s) \rightarrow 0$ då $s \rightarrow \infty$. Då är $g(s)$ Laplacetransformen av

$$f(t) = \sum_k \operatorname{Res}_{s=s_k} (g(s)e^{st}). \quad (3.4)$$

Om det reella talet a är sådant att $\operatorname{Re} s_k < a$ för alla k , gäller vidare att

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\Omega}^{a+i\Omega} g(s)e^{st} ds = \begin{cases} f(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

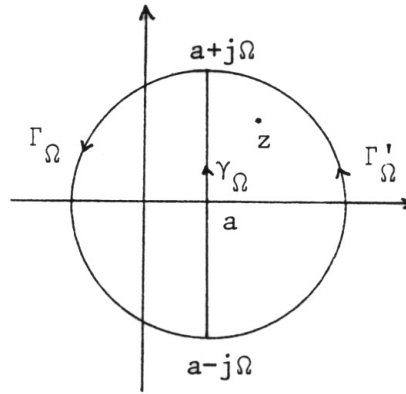
Bevis. Välj Ω så stort att alla s_k ligger innanför konturen $C = \gamma_\Omega + \Gamma_\Omega$ i figuren. Med $f(t)$ definierat av (3.4) ger residusatsen

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C g(s)e^{st} ds = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\gamma_\Omega} + \int_{\Gamma_\Omega} g(s)e^{st} ds \right]. \quad (3.6)$$

För $t \geq 0$ har vi uppskattningen

$$|f(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_C |g(s)| e^{(\operatorname{Re} s)t} |ds| \leq \frac{1}{2\pi} e^{at} \int_C |g(s)| |ds| = M e^{at}. \quad (3.7)$$

Alltså har $f(t)$ en Laplacetransform. Låt oss visa att den är $g(s)$.



Fixera z med $\operatorname{Re} z > a$ och låt $\Omega > |z - a|$. Enligt Fubinis sats om omkastning av integrationsordningen är

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(t)e^{-zt} dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \int_C g(s)e^{-(z-s)t} ds dt = \frac{1}{2\pi i} \int_C g(s) \int_0^\infty e^{-(z-s)t} dt ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(s)}{z-s} ds = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\Omega} \frac{g(s)}{s-z} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\Omega} \frac{g(s)}{s-z} ds. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Enligt Cauchys integralformel är

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'_\Omega} \frac{g(s)}{s-z} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\Omega} \frac{g(s)}{s-z} ds. \quad (3.9)$$

Om $C_\Omega = \Gamma'_\Omega + \Gamma_\Omega$ är cirkeln $|s-a| = \Omega$, fås alltså ur (3.8) och (3.9)

$$g(z) - \int_0^\infty f(t)e^{-zt} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\Omega} \frac{g(s)}{s-z} ds. \quad (3.10)$$

Nu skall vi utnyttja att $g(s) \rightarrow 0$ då $s \rightarrow \infty$, vilket är liktydigt med att $\max_{s \in C_\Omega} |g(s)| \rightarrow 0$ då $\Omega \rightarrow \infty$. Vi har

$$\left| \int_{C_\Omega} \frac{g(s)}{s-z} ds \right| \leq \frac{\max_{s \in C_\Omega} |g(s)|}{\Omega - |z-a|} \cdot 2\pi\Omega \rightarrow 0 \quad \text{då} \quad \Omega \rightarrow \infty.$$

Låt $\Omega \rightarrow \infty$ i (3.10) så fås

$$\int_0^\infty f(t)e^{-zt} dt = g(z),$$

vilket bevisar påståendet om f 's Laplacetransform.

Om man så vill, följer nu (3.5) av inversionssatsen, men vi skall ge ett direkt bevis i detta fall. Om $t > 0$ följer av Jordans lemma (Lemma 1.2) (gör substitutionen $z = -i(s-a)$, som överför Γ_Ω till en halvcirkel i övre halvplanet) att

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\Omega} g(s)e^{st} ds = 0.$$

Alltså ger (3.6) att

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\Omega}^{a+i\Omega} g(s)e^{st} ds = f(t) \quad \text{för} \quad t > 0.$$

Om $t < 0$ följer på samma sätt att

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{\Gamma'_\Omega} g(s)e^{st} ds = 0,$$

och eftersom enligt Cauchys sats

$$\int_{\Gamma'_\Omega} g(s)e^{st} ds - \int_{\gamma_\Omega} g(s)e^{st} ds = 0,$$

är

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\Omega}^{a+i\Omega} g(s)e^{st} ds = 0 \quad \text{för} \quad t < 0.$$

□

Exempel 3.1. Förutsättningarna i Sats 3.2 är uppfyllda för rationella funktioner $g(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, där $\text{grad } P < \text{grad } Q$.

Exempel 3.2. $g(s) = \frac{1}{s}e^{-\frac{1}{s}}$ uppfyller förutsättningarna i Sats 3.2. Den enda singulariteten är i origo, så $g(s)$ är Laplacetransformen av

$$f(t) = \text{Res}_{s=0} g(s)e^{st}.$$

Nu är

$$\begin{aligned} g(s)e^{st} &= \frac{1}{s}e^{-\frac{1}{s}}e^{st} = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n s^{-n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} s^k t^k = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^k}{n!k!} s^{k-n-1}. \end{aligned}$$

Koefficienten för s^{-1} fås genom att summera alla termer med $k = n$, så att residun är

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(n!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{2\sqrt{t}}{2}\right)^{2n} = \underline{J_0(2\sqrt{t})}.$$

Nästa resultat meddelar vi utan bevis. En liknande sats finns i Folland, Theorem 8.5.

Sats 3.3. Antag att (1) $F(s)$ är analytisk för $\text{Re } s \geq a$, (2) $|F(s)| \leq \frac{C}{|s|^\alpha}$ för $\text{Re } s \geq a$, där $\alpha > 0$, och $|F'(s)| \leq \frac{C'}{|s|^\beta}$ för $\text{Re } s \geq a$, där $\beta > 1$, eller (2') $|F(s)| \leq \frac{C}{|s|^\alpha}$ för $\text{Re } s \geq a$, där $\alpha > 1$.

Då är $F(s)$ Laplacetransformen av

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)e^{st} ds, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Exempel 3.3. $F(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}e^{-c\sqrt{s}}$ (principalgrenen av $\sqrt{s}$) uppfyller förutsättningarna (1) och (2') i Sats 3.3 med godtyckligt $a > 0$ om $c > 0$ (ty $e^{-c\sqrt{s}}$ går mot noll fortare än varje potens av $|s|$ då $|s| \rightarrow \infty$, $\text{Re } s \geq a > 0$). Om $c = 0$ är i stället förutsättningarna (1) och (2) uppfyllda. Integralen i (3.11) kan beräknas med residukalkyl som i Folland, sid. 271-272. Resultatet är att

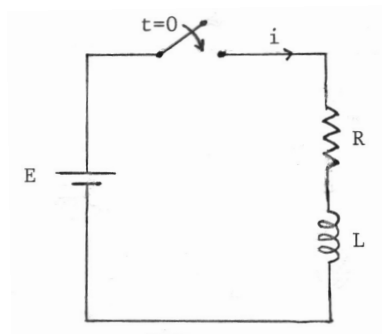
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{c^2}{4t}}, \quad t > 0.$$

4. Elektriska nät och linjära system

4.1. Icke-stationära förlopp i elektriska nät analyserade med Laplacetransformer

Antag att vi vill studera ett icke-stationärt förlopp i ett elektriskt nät, t. ex. insvängningsförloppet efter en inkoppling. Vi måste då ställa upp kretsens differentialekvationer och lösa dessa med hänsyn till föreskrivna begynnelsevillkor. Om nätet endast innehåller linjära, tidsinvarianta komponenter, blir differentialekvationerna linjära med konstanta koefficienter. De kan då med fördel lösas med Laplacetransformation. Låt oss betrakta ett enkelt exempel.

Exempel. Bestäm strömmen $i(t)$ för $t \geq 0$ i nedanstående RL-krets:



Vi får differentialekvationen

$$Ri + L \frac{di}{dt} = E \quad \text{för } t > 0, i(0) = 0.$$

Laplacetransformering ger, om $I(s)$ är Laplacetransformen av $i(t)$,

$$RI(s) + LsI(s) = \frac{E}{s}, \quad I(s) = \frac{E}{s(R + Ls)} = \frac{E}{R} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R}{L}} \right),$$

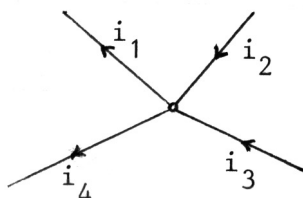
$$\underline{i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L})\theta(t)}.$$

Detta kan systematiseras, så att man aldrig behöver skriva upp differentialekvationerna, utan man inför ett transformerat nät, som sedan kan behandlas med likströmsmetoder. Låt oss först se på de grundläggande sambanden och hur de transformeras.

Kirchhoffs strömlag: Den algebraiska summan av de strömmar som i varje ögonblick lämnar en nod är noll.

Detta är en konsekvens av strömstyrkans definition som laddningsflöde per tidsenhet.

Exempel.



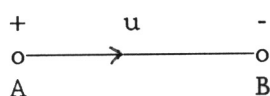
$$i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) + i_4(t) = 0$$

Efter Laplacetransformering fås motsvarande relation mellan Laplacetransformerna $I_k(s)$:

$$I_1(s) - I_2(s) - I_3(s) + I_4(s) = 0.$$

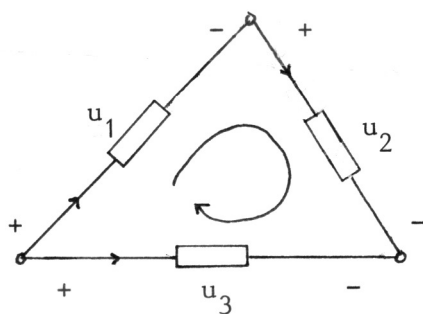
Kirchhoffs spänningslag: Den algebraiska summan av grenspänningarna i en slinga är noll i varje ögonblick.

Detta är en konsekvens av att en grenspänning är en potentialskillnad:



$$u = \text{potentialen i } A - \text{potentialen i } B$$

Exempel.

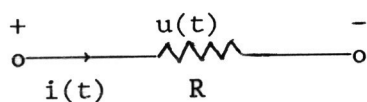


$$u_1(t) + u_2(t) - u_3(t) = 0$$

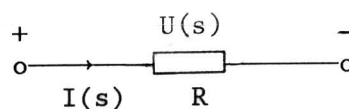
Efter Laplacetransformering fås motsvarande relation mellan Laplacetransformerna $U_k(s)$:

$$U_1(s) + U_2(s) - U_3(s) = 0.$$

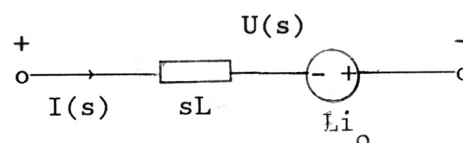
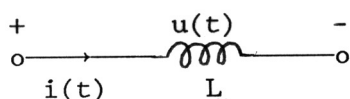
Resistans.



$$u(t) = Ri(t)$$

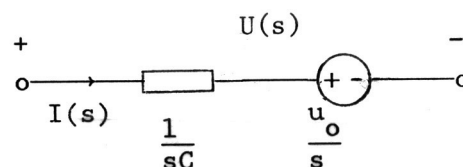
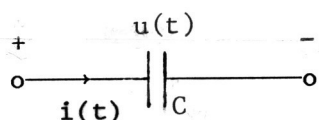


$$U(s) = RI(s)$$

Induktans.

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}, i(0-) = i_0$$

$$U(s) = sLI(s) - Li_0$$

Kapacitans.

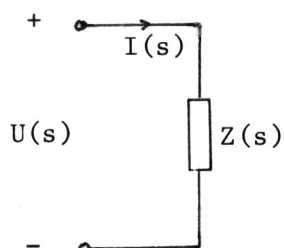
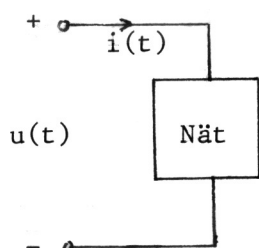
$$u(t) = u_0 + \frac{1}{C} \int_{0-}^t i(\tau) d\tau, t > 0$$

$$u(0-) = u_0$$

$$U(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{u_0}{s}$$

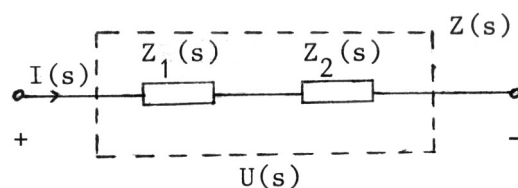
Impedans, admittans.

För ett allmänt linjärt, tidsinvariant nät utan inre källor gäller, om alla strömmar och spänningar är 0 för $t < 0$, ett samband av formen $U(s) = Z(s)I(s)$, med u och i som i figuren.



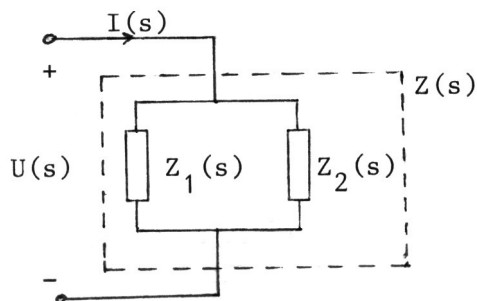
$$U(s) = Z(s)I(s)$$

$Z(s)$ kallas nätets *impedans*, och $\frac{1}{Z(s)}$ kallas för dess *admittans*. Vid seriekoppling adderas impedanser:



$$Z(s) = Z_1(s) + Z_2(s)$$

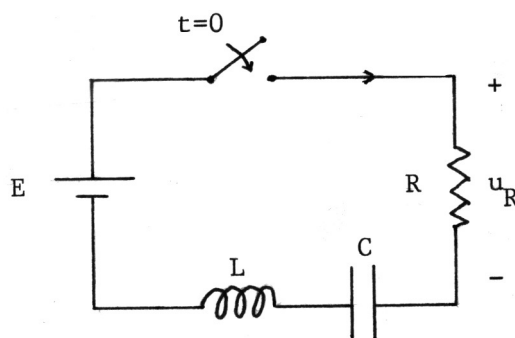
Vid parallellkoppling adderas admittanser:



$$\frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{Z_1(s)} + \frac{1}{Z_2(s)}$$

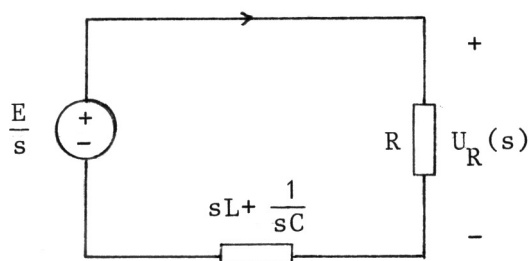
Impedansen för en resistans R , en induktans L , och en kapacitans C är enligt ovan R , sL resp. $\frac{1}{sC}$.

Problem 1.



Beräkna u_R för $t \geq 0$. Nätet saknar begynnelseenergi, dvs. induktansen är strömlös och kapacitansen spänningslös vid $t = 0-$.

Lösning. Nätet transformeras i enlighet med ovanstående regler.



Impedanserna för induktansen och kapacitansen adderas. Spänningsdelning ger

$$U_R(s) = \frac{E}{s} \frac{R}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{R}{L} \frac{E}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}.$$

Inför

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Då kan vi skriva

$$U_R(s) = \frac{R}{L} \frac{E}{s^2 + 2\beta s + \omega_0^2} = \frac{R}{L} \frac{E}{(s + \beta)^2 + \omega^2}.$$

1. Om $\beta < \omega_0$ kallas kretsen underkritiskt dämpad, och vi inför $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, så att

$$U_R(s) = \frac{R}{L} \frac{E}{(s + \beta)^2 + \omega^2},$$

$$u_R(t) = \frac{RE}{\omega L} e^{-\beta t} \sin \omega t, \quad t \geq 0.$$

2. Om $\beta = \omega_0$ kallas kretsen kritiskt dämpad, och vi får

$$U_R(s) = \frac{R}{L} \frac{E}{(s + \beta)^2},$$

$$u_R(t) = \frac{RE}{L} t e^{-\beta t}, \quad t \geq 0.$$

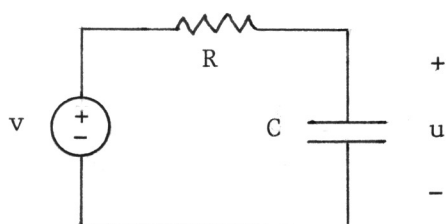
3. Om $\beta > \omega_0$ kallas kretsen överkritiskt dämpad, och vi inför $\Omega = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$, så att

$$U_R(s) = \frac{R}{L} \frac{E}{(s + \beta)^2 - \Omega^2},$$

$$u_R(t) = \frac{RE}{\Omega L} e^{-\beta t} \sinh \Omega t = \frac{RE}{2\Omega L} [e^{-(\beta - \Omega)t} - e^{-(\beta + \Omega)t}], \quad t \geq 0.$$

Anmärkning. Lösningen i det första fallet kan användas även om ω är komplext eller 0. Om $\beta > \omega_0$, är $\omega = j\Omega$, och $\frac{\sin \omega t}{\omega} = \frac{\sinh \Omega t}{\Omega}$. För $\beta = \omega_0$ fås lösningen som ett gränsvärde: $\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin \omega t}{\omega} = t$.

Problem 2.



Bestäm $u(t)$ för $t \geq 0$, då

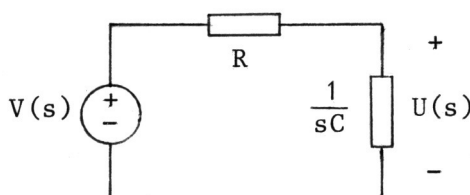
$$v(t) = \begin{cases} v_0 & \text{för } 0 < t < T, \\ 0 & \text{för } t < 0 \text{ och } t > T. \end{cases}$$

Lösning. Vi kan skriva

$$v(t) = v_0[\theta(t) - \theta(t - T)].$$

Dess Laplacetransform är

$$V(s) = v_0\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-Ts}\right).$$



Ur det transformerade nätet får vi

$$U(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} V(s) = \frac{v_0}{s(1 + RCs)} (1 - e^{-Ts}) = U_1(s) - U_1(s)e^{-Ts},$$

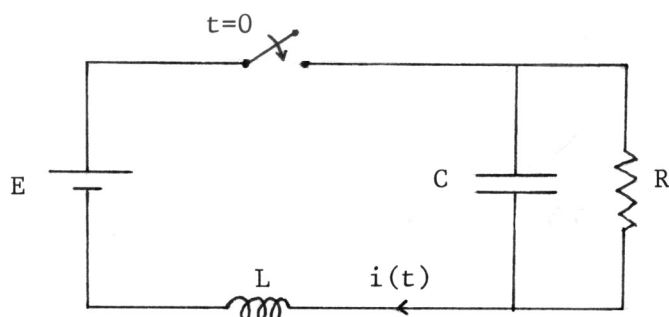
där

$$U_1(s) = \frac{v_0}{s(1 + RCs)} = v_0\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}\right) \sqsubset v_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\theta(t) = u_1(t).$$

Alltså är enligt fördröjningssatsen

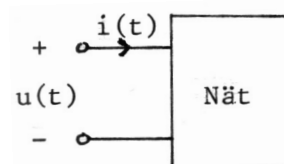
$$u(t) = u_1(t) - u_1(t - T) = \underline{v_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\theta(t) - v_0(1 - e^{-\frac{t-T}{RC}})\theta(t - T)}.$$

Problem 3.



Beräkna den under tiden $0 \leq t \leq T$ i spolen inmatade energin, om $R = \frac{1}{2}$, $C = 1$ och $L = 1$.

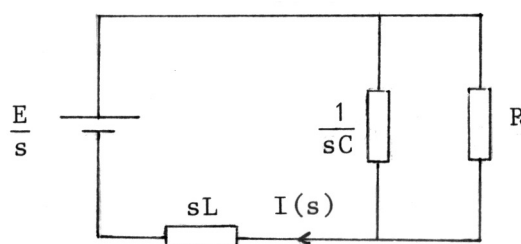
Lösning. Allmänt gäller att den i ett nät inmatade effekten är $p(t) = u(t)i(t)$, med referensriktningar som i figuren. Den på tiden $t_0 \leq t \leq t_1$ inmatade energin är $W = \int_{t_0}^{t_1} u(t)i(t) dt$.



I detta fall är $u(t) = L \frac{di}{dt}$, $i(0-) = 0$, så att

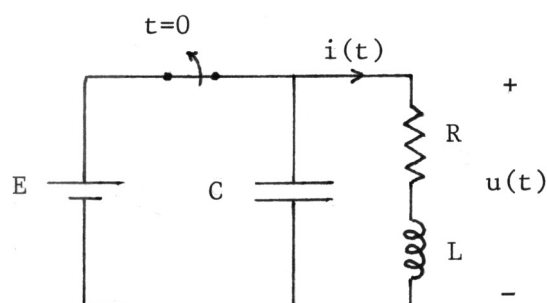
$$W = \int_{0-}^{T+} Li(t) \frac{di}{dt} dt = \frac{L}{2} i^2(T).$$

Transformerat nät:



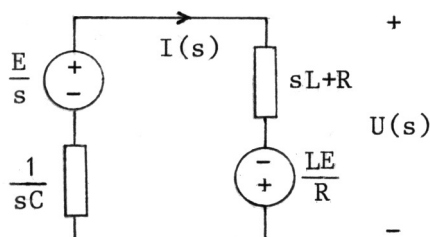
$$\begin{aligned} \frac{E}{s} &= (sL + \frac{1}{sC + \frac{1}{R}})I(s) = (s + \frac{1}{s+2})I(s) = \frac{(s+1)^2}{s+2}I(s), \\ I(s) &= E \frac{s+2}{s(s+1)^2} = E(\frac{2}{s} - \frac{2}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}), \\ i(t) &= E(2 - 2e^{-t} - te^{-t})\theta(t), \\ W &= \frac{1}{2}[i(T)]^2 = \frac{E^2}{2}(2 - 2e^{-T} - Te^{-T})^2. \end{aligned}$$

Problem 4.



Kretsen är i stationärt tillstånd för $t < 0$. Bestäm spänningen $u(t)$ över kondensatorn för $t \geq 0$.

Lösning. Vi har begynnelsevärdena $u(0-) = E$, $i(0-) = \frac{E}{R}$. Det transformerade nätet blir då



$$\frac{E}{s} + \frac{LE}{R} = (sL + R + \frac{1}{sC})I(s),$$

$$I(s) = \frac{E}{R} \frac{s + \frac{R}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}.$$

Som i Problem 1 inför vi

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2},$$

så att

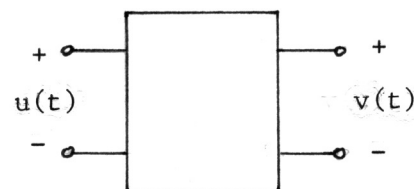
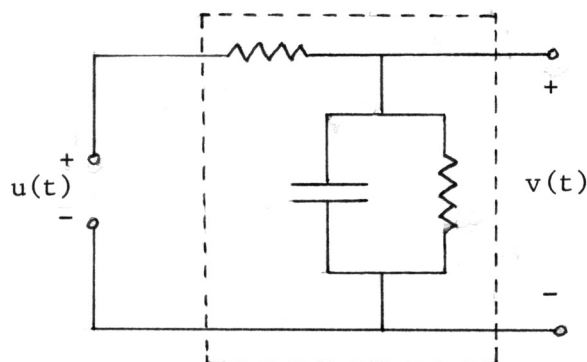
$$I(s) = \frac{E}{R} \frac{s + 2\beta}{(s + \beta)^2 + \omega^2}.$$

Den sökta spänningen är

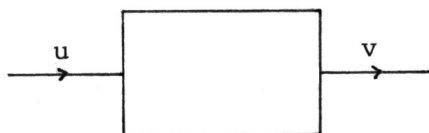
$$\begin{aligned} U(s) &= \frac{E}{s} - \frac{1}{sC}I(s) = \frac{E}{s} - \frac{E}{CR} \frac{s + 2\beta}{s[(s + \beta)^2 + \omega^2]} = \\ &= E \left\{ \frac{s + \beta}{(s + \beta)^2 + \omega^2} + \left(\beta - \frac{\omega_0^2}{2\beta} \right) \frac{1}{(s + \beta)^2 + \omega^2} \right\}, \\ u(t) &= E \left\{ e^{-\beta t} \cos \omega t + \left(\beta - \frac{\omega_0^2}{2\beta} \right) e^{-\beta t} \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right\} \\ &= \underline{E e^{-\beta t} \left[\cos \omega t + \frac{2\beta^2 - \omega_0^2}{2\beta\omega} \sin \omega t \right]}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

4.2. Linjära system

Ofta står vi inför en problemställning av följande allmänna typ: Någonstans finns en känd spänning eller ström pålagd, och vi är intresserade av den resulterande spänningen eller strömmen någon annanstans i nätet.



Nätet kan uppfattas som en "svart låda" med en ingång och en utgång (se fig.). Tidsfunktionerna $u(t)$ och $v(t)$ kallas för insignal resp. utsignal. Utsignalen är någon sorts funktion av insignalen, och vi åskådliggör det på följande sätt:



Detta betraktelsesätt är ytterst generellt; i det allmänna fallet symboliserar den svarta lådan något slags system, som överför insignaler i utsignaler. Om vi, som ovan, har ett nät bestående av linjära, tidsinvarianta komponenter utan oberoende källor, blir också systemet linjärt och tidsinvariant. Det blir också kausalt beroende på lagen om orsak och verkan. Vi skall strax ge precisa definitioner av dessa begrepp och därefter något närmare studera allmänna, linjära, tidsinvarianta system.

Definition. Ett *linjärt system* S är en linjär avbildning från ett linjärt rum av insignaler till ett linjärt rum av utsignaler. Linjäriteten innebär att

$$S[c_1x_1 + c_2x_2] = c_1S[x_1] + c_2S[x_2].$$

Vi antar också någon form av kontinuitet så att detta kan utsträckas till oändliga summor och integraler:

$$S\left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n S[x_n],$$

$$S\left[\int_a^b x(\alpha, t) d\alpha\right] = \int_a^b S[x(\alpha, t)] d\alpha.$$

Låt $y(t) = S[x(t)]$. Det linjära systemet S är *tidsinvariant* om

$$S[x(t - T)] = y(t - T) \quad \text{för alla } T \in \mathbb{R}.$$

Definition. Systemets utsignal svarande mot insignalen $\delta(t)$ kallas för systemets *impuls-svar*.

Sats 4.1. För ett linjärt, tidsinvariant system S gäller sambandet

$$S[x] = h * x,$$

där h är systemets *impulssvar*.

Bevis. Vi kan skriva

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau.$$

Vi har $S[\delta(t)] = h(t)$, och av tidsinvariansen följer att $S[\delta(t - \tau)] = h(t - \tau)$ för alla τ . Linjäriteten ger så

$$\begin{aligned} S[x(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) S[\delta(t - \tau)] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \\ &= (x * h)(t) = (h * x)(t). \end{aligned}$$

□

Sats 4.2. Om S är linjärt och tidsinvariant gäller att

$$S[e^{i\omega t}] = \hat{h}(\omega) e^{i\omega t}$$

för varje $\omega \in \mathbb{R}$, där

$$\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt$$

är Fouriertransformen av h .

Bevis. Enligt Sats 4.1 är

$$\begin{aligned} S[e^{i\omega t}] &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau = e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \hat{h}(\omega) e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

□

Om $h(t)$ är reell gäller för $\omega > 0$ att

$$\begin{aligned} S[\cos \omega t] &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cos \omega(t - \tau) d\tau = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau \\ &= \operatorname{Re} [\hat{h}(\omega) e^{i\omega t}]. \end{aligned}$$

Detta är grunden för $j\omega$ -metoden i elektrotekniken.

Genom Fourieruppdelning kan signalen $x(t)$ framställas som en överlagring av svängningar $e^{i\omega t}$ med varierande vinkelfrekvens ω :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Analogt för utsignalen:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Genom Fouriertransformation av sambandet $y = h * x$ fås $\hat{y}(\omega) = \hat{h}(\omega) \hat{x}(\omega)$. Detta visar hur systemet verkar som ett filter, och vi kan direkt avläsa hur de olika frekvenskomponenterna i uppdelningen påverkas.

Definition. Det linjära systemet S kallas *kausalt* om utsignalens värde vid tiden t bara beror på insignalens värden vid tiden $\leq t$.

Sats 4.3. Antag S linjärt och tidsinvariant med impulssvar h . Då gäller att S är kausalt om och endast om $h(t) = 0$ för $t < 0$.

Bevis. Antag S kausalt. Tillämpa definitionen av kausalitet på insignalen $\delta(t)$. Eftersom $\delta(t)$ och insignalen 0 för alla t är lika för $t < 0$ följer att $h(t) = 0$ för $t < 0$. Antag omvänt att $h(t) = 0$ för $t < 0$. Enligt Sats 4.1 är då sambandet mellan insignal och utsignal

$$y(t) = (h * x)(t) = \int_{-\infty}^t h(t - \tau)x(\tau)d\tau,$$

vilket visar att y vid tider t bara beror på $x(\tau)$ för tider $\tau \leq t$. $\square$

Exempel 4.1. Ett *idealt lågpasfilter* filtrerar bort alla komponenter med vinkelfrekvens över en viss gränsvinkelfrekvens Ω , dvs vi har

$$\hat{h}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{för } |\omega| < \Omega, \\ 0 & \text{för } |\omega| > \Omega. \end{cases}$$

Impulssvaret är

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\omega t}d\omega = \frac{\sin \Omega t}{\pi t}.$$

Eftersom $h(t)$ inte är 0 för alla $t < 0$, är inte systemet kausalt. Ett idealt lågpasfilter kan alltså inte realiseras fysikaliskt, men begreppet är ändå användbart som en matematisk idealisering.

Exempel 4.2. Det ideala lågpasfiltret i Exempel 4.1 är inte kausalt, men kanske situationen förbättras om vi kräver mindre av $\hat{h}(\omega)$. Antag att vi bara kräver att $\hat{h}(\omega) = 0$ för $|\omega| > \Omega$, $\hat{h}$ absolutintegrerbar men ej identiskt noll. Vi kan Fourierframställa $h(t)$ som

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{h}(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

Här kan vi låta t vara en komplex variabel, och $h(t)$ blir då analytisk i hela t -planet. Om $h(t) = 0$ på negativa realaxeln, ger entydighetssatsen för analytiska funktioner att $h(t) = 0$ för all t . Då är

$$\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}dt = 0,$$

i strid med förutsättningen. Alltså är inte heller detta system kausalt.

Kausala, tidsinvarianta system kan ofta analyseras med hjälp av Laplacetransform. Om nämligen $x(t) = 0$ för $t < 0$, är

$$y(t) = \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad \text{för } t > 0,$$

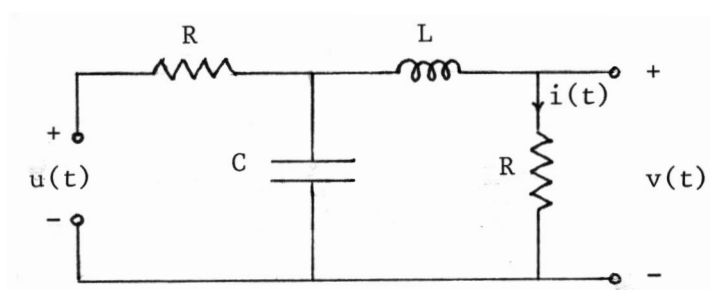
och faltningsatsen för Laplacetransformer ger då sambandet

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

mellan Laplacetransformerna.

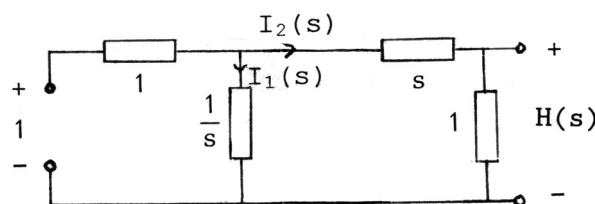
Definition. Laplacetransformen $H(s)$ av impulssvaret för ett kausalt linjärt och tidsinvariant system kallas för systemets *överföringsfunktion*.

Problem 5.



Bestäm överföringsfunktionen och impulssvaret för det linjära systemet $u \rightsquigarrow v$, om $R = 1$, $L = 1$, $C = 1$. Bestäm svaret på insignalen $\cos \omega t$.

Lösning. Vi väljer insignalen $u(t) = \delta(t)$ och Laplacetransformerar nätet.



$$\begin{cases} 1 \cdot (I_1(s) + I_2(s)) + \frac{1}{s}I_1(s) = 1, \\ \frac{1}{s}I_1(s) = (s+1)I_2(s), \end{cases}$$

varav $I_2(s) = \frac{1}{(s+1)^2+1}$. Vi får

$$H(s) = 1 \cdot I_2(s) = \frac{1}{(s+1)^2+1}, \quad h(t) = \underline{e^{-t} \sin t \cdot \theta(t)}.$$

Svaret på $\cos \omega t$ är enligt ovan $\operatorname{Re} [\hat{h}(\omega)e^{i\omega t}]$. Eftersom $h(t)$ är absolutintegrerbar, och $h(t) = 0$ för $t < 0$ (kausalt system), fås Fouriertransformen ur Laplacetransformen genom $\hat{h}(\omega) = H(i\omega)$. Alltså gäller att

$$\begin{aligned} \cos \omega t &\leadsto \operatorname{Re} \frac{e^{i\omega t}}{(1+i\omega)^2+1} = \operatorname{Re} \frac{(\cos \omega t + i \sin \omega t)(2-\omega^2) - 2i\omega}{(2-\omega^2)^2 + 4\omega^2} = \\ &= \frac{(2-\omega^2)\cos \omega t + 2\omega \sin \omega t}{\omega^4 + 4}. \end{aligned}$$

Definition. Ett linjärt, tidsinvariant system med impulssvar $h(t)$ kallas *stabilt* om $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$.

Den fysikaliska betydelsen av stabilitet är att begränsade insignaler ger upphov till begränsade utsignaler. Detta framgår av följande sats.

Sats 4.4. *Ett linjärt, tidsinvariant system S är stabilt om och endast om det finns en konstant K så att*

$$|x(t)| \leq M \quad \text{för alla } t \Rightarrow |S[x](t)| \leq KM \quad \text{för alla } t. \quad (4.1)$$

Bevis. 1. Antag S stabilt. Antag $|x(t)| \leq M$ för alla t . Då är

$$\begin{aligned} |S[x](t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)| d\tau \leq \\ &\leq M \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau, \end{aligned}$$

dvs. vi har egenskapen (4.1) med $K = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$.

2. Antag egenskapen (4.1) är uppfylld. Välj insignalen

$$x(t) = \begin{cases} \frac{\bar{h}(-t)}{|h(-t)|}, & \text{då } h(-t) \neq 0, \\ 0, & \text{då } h(-t) = 0. \end{cases}$$

Då är $|x(t)| \leq 1$ för alla t , och enligt (4.1) är $|S[x](t)| \leq K \cdot 1$ för alla t . Speciellt är $|S[x](0)| \leq K$. Men

$$S[x](0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau.$$

Alltså är $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau \leq K < \infty$, dvs. S är stabilt. $\square$

I tillämpningarna möter man ofta system med rationell överföringsfunktion. För sådana system har vi följande stabilitetssats.

Sats 4.5. *Ett kausalt linjärt och tidsinvariant system med rationell överföringsfunktion $H(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$ är stabilt om och endast om grad $Q \leq$ grad P och alla poler till $H(s)$ ligger i halvplanet $\operatorname{Re} s < 0$.*

Bevis. Eftersom systemet är kausalt, är $h(t) = 0$ för $t < 0$, och systemet är stabilt om och endast om $\int_{0^-}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$. Vi har $H(s) = \int_{0^-}^{\infty} h(t)e^{-st} dt$.

1. Antag systemet stabilt. Då är för $\operatorname{Re} s \geq 0$

$$|H(s)| \leq \int_{0^-}^{\infty} |h(t)| dt < \infty,$$

dvs. $H(s)$ är begränsad i $\operatorname{Re} s \geq 0$. Då måste $\operatorname{grad} Q \leq \operatorname{grad} P$ (ty om $\operatorname{grad} Q > \operatorname{grad} P$ gäller att $H(s) \rightarrow \infty$ då $s \rightarrow \infty$), och alla poler måste ligga i $\operatorname{Re} s < 0$ (ty $H(s) \rightarrow \infty$ då $s \rightarrow$ en pol).

2. Antag att $\operatorname{grad} Q \leq \operatorname{grad} P$ och att alla poler till $H(s)$ ligger i $\operatorname{Re} s < 0$. Vi kan då skriva $H(s) = A + H_1(s)$, där A är en konstant och där $H_1(s) \rightarrow 0$ då $s \rightarrow \infty$. Det finns ett tal $\sigma > 0$ så att alla poler till $H(s)$ (och därmed till $H_1(s)$) uppfyller $\operatorname{Re} s < -\sigma$. Enligt Sats 3.2 är $H_1(s)$ Laplacetransformen av en funktion $h_1(t)$ sådan att $|h_1(t)| \leq Me^{-\sigma t}$ för $t \geq 0$ och en viss konstant M (se (3.7)). Då är $H(s)$ Laplacetransformen av $h(t) = A\delta(t) + h_1(t)$, och vi har

$$\begin{aligned} \int_{0^-}^{\infty} |h(t)| dt &\leq |A| + \int_{0^-}^{\infty} |h_1(t)| dt \leq |A| + \int_{0^-}^{\infty} Me^{-\sigma t} dt = \\ &= |A| + \frac{M}{\sigma} < \infty. \end{aligned}$$

Alltså är systemet stabilt. □

Anmärkning. Satsen kan också bevisas genom att $H(s)$ partialbråksuppdelas.

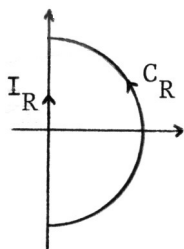
För ett kausalt system med rationell överföringsfunktion $H(s) = Q(s)/P(s)$ avgörs stabiliteten av lokaliseringen av nollställena till P . Antalet nollställen i t ex högra halvplanet kan avgöras med hjälp av argumentprincipen.

Exempel 4.3. Hur många nollställen har $P(s) = s^5 - s^4 + 2s^3 + 1$ för $\operatorname{Re} s \geq 0$?

Lösning. På imaginäraxeln är $s = i\omega$, och

$$P(i\omega) = 1 - \omega^4 + i(\omega^5 - 2\omega^3) \neq 0.$$

Låt R vara så stort att alla nollställen i $\operatorname{Re} s > 0$ uppfyller $|s| < R$, och låt s gå runt konturen i figuren.



$$C_R = \{Re^{i\theta} : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$$I_R = \{s = i\omega : -R \leq \omega \leq R\}$$

Låt N vara antalet nollställen i högra halvplanet. Enligt argumentprincipen är

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_{C_R - I_R} \arg P(s) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{C_R} \arg P(s) - \frac{1}{2\pi} \Delta_{I_R} \arg P(s).$$

Nu är

$$\begin{aligned} \Delta_{C_R} \arg P(s) &= \Delta_{C_R} \arg s^5 \left(1 - \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s^5}\right) = \\ &= \Delta_{C_R} \arg s^5 + \Delta_{C_R} \arg \left(1 - \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s^5}\right) = \\ &= 5\pi + \Delta_{C_R} \arg \left(1 - \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s^5}\right). \end{aligned}$$

Eftersom kurvan $z = 1 - \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s^5}$, $s \in C_R$, krymper mot punkten 1, då $R \rightarrow \infty$, så är

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{C_R} \arg P(s) = 5\pi.$$

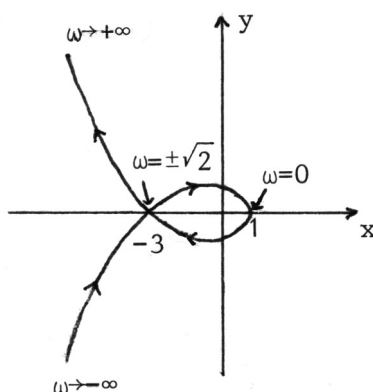
Om I får beteckna den positivt orienterade imaginäraxeln, är alltså

$$N = \frac{5}{2} - \frac{1}{2\pi} \Delta_I \arg P(s).$$

Skissera kurvan $z = x + iy = P(i\omega)$, och studera argumentvariationen då ω växer från $-\infty$ till $+\infty$. Vi har

$$\begin{cases} x = 1 - \omega^4, \\ y = \omega^3(\omega^2 - 2). \end{cases}$$

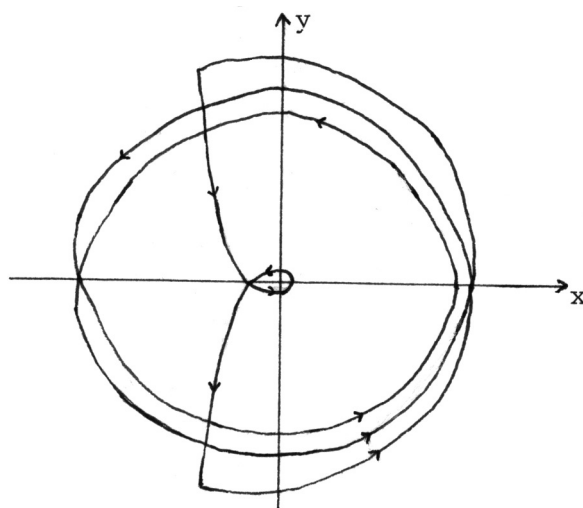
Det är viktigast att se på y :s nollställen och tecknet på y mellan nollställena samt på vad som händer då $\omega \rightarrow \pm\infty$. Vi ser att $y = 0$ då $\omega = 0$ och $\omega = \pm\sqrt{2}$, vilket ger $x = 1$ resp. $x = -3$. Kurvan $z = P(i\omega)$ i stora drag:



Eftersom $\frac{y}{x} \rightarrow -\infty$ då $\omega \rightarrow +\infty$, och $\frac{y}{x} \rightarrow +\infty$ då $\omega \rightarrow -\infty$, ser vi från figuren att $\arg P(i\omega)$ avtar från $\frac{3\pi}{2}$, säg, till $-\frac{3\pi}{2}$, dvs. $\Delta_I \arg P(s) = -3\pi$. Alltså är

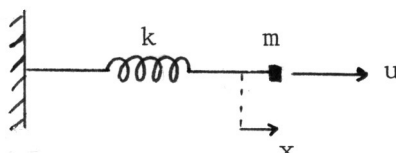
$$N = \frac{5}{2} - \frac{1}{2\pi}(-3\pi) = 4.$$

Som en variant kan man rita kurvan $z = P(s)$, då s genomlöper hela den slutna, positivt orienterade, kurvan $\Gamma_R = C_R - I_R$ för ett fixt (men tillräckligt stort) R . Då får man en bild av ungefär följande utseende:

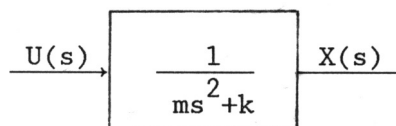


Man ser att kurvan går fyra varv runt origo, dvs. $\Delta_{\Gamma_R} \arg P(s) = 8\pi$, och $N = 4$. Observera att imaginäraxeln nu genomlöps med avtagande ω i stället för växande som ovan.

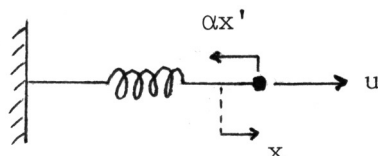
Inom reglertekniken sysslar man mycket med *återkopplade system*. Låt oss ge ett enkelt exempel. Betrakta en kropp med massan m som är förbunden med en fjäder med fjäderkonstant k enligt figur. Om kroppen påverkas av en yttre kraft u , blir rörelseekvationen



$mx'' + kx = u$, där x betecknar avvikelser från jämviktsläget. Antag att $u(t)$ och $x(t)$ är 0 för $t < 0$. Överföringsfunktionen för det linjära systemet $u \leadsto x$ blir $\frac{1}{ms^2 + k}$.

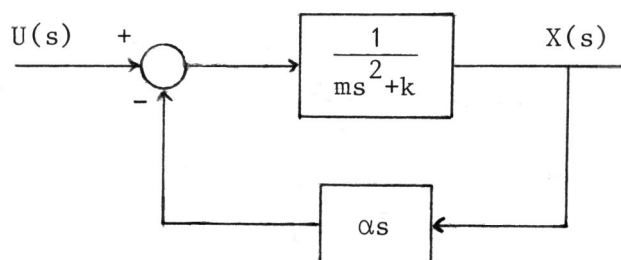


För att dämpa rörelsen kan man införa en återkoppling i form av en viskös dämpning $\alpha x'$.

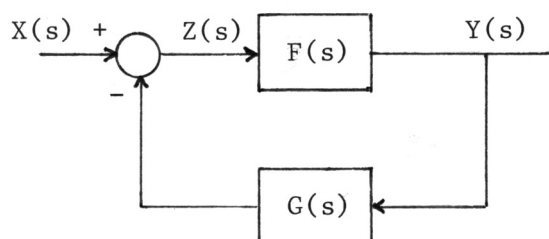


Rörelseekvationen blir nu $mx'' + kx = u - \alpha x'$, eller i blockdiagramform efter Laplacetrans-

formering:



Rent allmänt beskrivs ett system med återkoppling av följande blockschema:



Överföringsfunktionen för systemet $x \leadsto y$ fås genom att eliminera $Z(s)$ ur ekvationerna

$$Y(s) = F(s)Z(s), \quad Z(s) = X(s) - G(s)Y(s),$$

vilket ger

$$Y(s) = \frac{F(s)}{F(s)G(s) + 1} X(s),$$

så att överföringsfunktionen är

$$H(s) = \frac{F(s)}{F(s)G(s) + 1}.$$

Under lämpliga förutsättningar på F och G avgörs stabiliteten av lokaliseringen av nollställen till $F(s)G(s) + 1$.

Exempel 4.4. För vilka reella värden på $K \neq 0$ saknar ekvationen

$$\frac{K}{(s+1)^2(3s-1)} + 1 = 0$$

rötter i halvplanet $\operatorname{Re} s \geq 0$?

Lösning. Den givna ekvationen kan skrivas $H_0(s) + 1/K = 0$, där

$$H_0(s) = \frac{1}{(s+1)^2(3s-1)}.$$

Låt s gå runt samma halvcirkel $C_R - I_R$ som i föregående exempel. Funktionen $H_0(s) + 1/K$ har en pol ($s = 1/3$) i högra halvplanet. Enligt argumentprincipen gäller att funktionen saknar nollställen i $\operatorname{Re} s \geq 0$ om och endast om

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{C_R - I_R} \arg(H_0(s) + 1/K) = 0 - 1 = -1,$$

dvs.

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{C_R} \arg(H_0(s) + 1/K) - \frac{1}{2\pi} \Delta_{I_R} \arg(H_0(s) + 1/K) = -1$$

för alla tillräckligt stora R . Eftersom kurvan $z = H_0(s) + 1/K$, $s \in C_R$, krymper mot punkten $1/K$ då $R \rightarrow \infty$, gäller att

$$\Delta_{C_R} \arg(H_0(s) + 1/K) \rightarrow 0 \quad \text{då} \quad R \rightarrow \infty.$$

Villkoret blir alltså

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_I \arg(H_0(s) + 1/K) = 1.$$

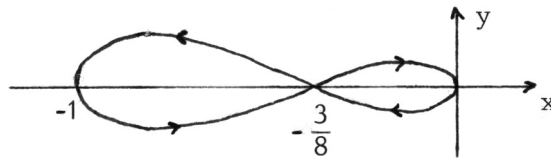
I ord uttryckt innebär detta att kurvan $z = H_0(i\omega) + 1/K$, $-\infty < \omega < \infty$, skall gå ett varv runt origo. Sammanfattningsvis gäller alltså att $H_0(s) + 1/K$ saknar nollställen i $\operatorname{Re} s \geq 0$ om och endast om kurvan $z = H_0(i\omega)$, $-\infty < \omega < \infty$, går ett varv i positiv led runt (men inte genom) punkten $-1/K$. Låt oss studera denna kurva. Vi har

$$\begin{aligned} z = x + iy = H_0(i\omega) &= \frac{1}{(1 + i\omega)^2(-1 + 3i\omega)} = \frac{(1 - i\omega)^2(-1 - 3i\omega)}{(1 + \omega^2)^2(1 + 9\omega^2)} = \\ &= \frac{-1 - 5\omega^2 + i\omega(3\omega^2 - 1)}{(1 + \omega^2)^2(1 + 9\omega^2)}, \end{aligned}$$

dvs.

$$\begin{cases} x = -\frac{1 + 5\omega^2}{(1 + \omega^2)^2(1 + 9\omega^2)}, \\ y = \frac{\omega(3\omega^2 - 1)}{(1 + \omega^2)^2(1 + 9\omega^2)}. \end{cases}$$

Vi ser att $x < 0$ för alla ω ; $y = 0$ då $\omega = 0$ och $\omega = \pm 1/\sqrt{3}$, och motsvarande x -värden är $x = -1$ resp. $x = -\frac{3}{8}$. Studera y :s tecken mellan nollställena, och notera att både x och y går mot 0 då $\omega \rightarrow \pm\infty$. Dessa observationer räcker för att kurvan skall kunna skisseras. Man får följande ungefärliga utseende:

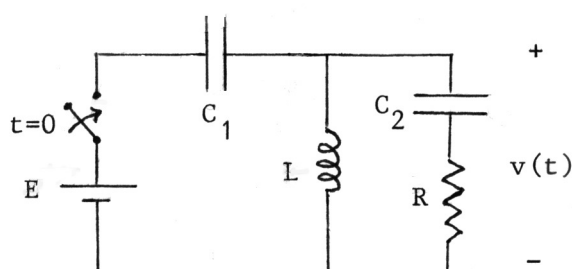


Man ser att de punkter $-1/K$ på realaxeln som omringas +1 varv av kurvan uppfyller $-1 < -1/K < -\frac{3}{8}$. Alltså saknar den givna ekvationen rötter i $\operatorname{Re} s \geq 0$ om och endast om $1 < K < \frac{8}{3}$.

Anmärkning. Bilden av imaginäraxeln under avbildningen $H_0(s)$ brukar kallas *Nyquist-diagrammet*.

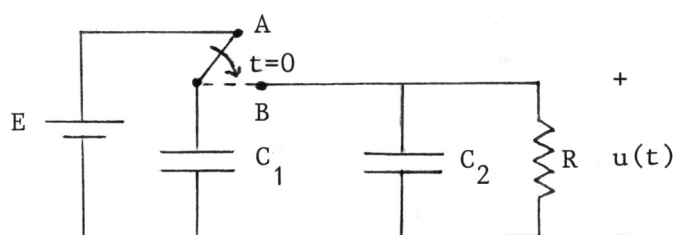
Övningsexempel

1)



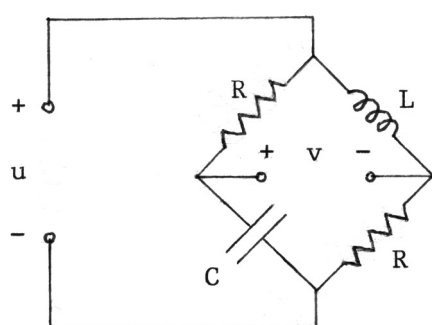
Beräkna $v(t)$, då $L = 1$,
 $C_1 = \frac{1}{9}$, $C_2 = \frac{8}{9}$, $R = \frac{81}{40}$.

2)



Stationärt tillstånd råder för $t < 0$. Vid $t = 0$ kopplas anslutningen om från A till B. Beräkna $u(t)$ för alla t . Är resultatet förenligt med att spänningen över C_2 bör ändras kontinuerligt? Förklara!

3)



Bestäm impulssvaret för systemet $u \leadsto v$. Är systemet stabilt?

4) Låt $F(s) = P(s)/Q(s)$, där P och Q är polynom med grad $P < \text{grad } Q$. Antag att Q endast har enkla nollställen $a_1, \dots, a_m$. Visa att $F(s)$ är Laplacetransformen av

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} e^{a_k t}. \quad (\text{Heavisides expansionsats})$$

- 5) Använd argumentprincipen för att bestämma antalet nollställen med positiv realdel till följande polynom.

a) $P(s) = s^4 + 5s^3 + 2s + 10.$

b) $P(s) = 2s^5 + s^4 + 6s^3 + 3s^2 + s + 1.$

- 6) Avgör för vart och ett av följande fall för vilka reella värden på K som ekvationen saknar rötter i $\text{Re } s \geq 0$. Skissera ett lämpligt Nyquistdiagram.

a) $\frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} + 1 = 0, T_1, T_2 > 0,$

b) $\frac{K(s + 2)}{(s + 1)(s - 3)} + 1 = 0,$

c) $\frac{K}{(s + 1)^3} + 1 = 0,$

d) $\frac{K(s + 1)}{s^2(s + 4)(s + 5)} + 1 = 0.$

Svar.

1) $v(t) = \frac{E}{9}[2e^{-t} + e^{-2t}(7 \cos t - 24 \sin t)]$

2) $u(t) = \frac{EC_1}{C_1 + C_2} e^{-\frac{t}{R(C_1 + C_2)}} \theta(t)$

3) $h(t) = \left(\frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{R}{L} e^{-\frac{Rt}{L}} \right) \theta(t).$ Stabilt.

5) a) Två b) Två

6) a) $K > -1$ b) $K = 0, K > 2$ c) $-1 < K < 8$ d) $0 \leq K < 99$

5. Samplingsteoremet

En version av samplingsteoremet finns bevisad i Folland, sid. 230. Här ges ett annat bevis som utnyttjar δ -funktioner och Fourierserieutveckling av ett impulståg.

Om en tidskontinuerlig funktion $f(t)$ samplas (känns av) vid tidpunkterna $t = nT$ erhålls en tidsdiskret signal $\{f(nT)\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Denna kan representeras på tidskontinuerlig form som det viktade impulståget $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t - nT)$. Vi har (om $f(t)$ är kontinuerlig)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - nT) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = f(t)s_T(t).$$

Bandbegränsade signaler kan rekonstrueras ur sina sampelvärden som följande sats visar.

Sats 5.1 (Samplingsteoremet). *Antag att $f(t)$ är kontinuerlig med Fouriertransform $\hat{f}(\omega) = 0$ för $|\omega| \geq \alpha$ (bandbegränsad signal). Om signalen samplas med frekvensen $\frac{1}{T} \geq \frac{\alpha}{\pi}$ (vinkelfrekvens $\Omega = \frac{2\pi}{T} \geq 2\alpha$), så kan $f(t)$ återvinnas ur den samplade signalen genom en lågpasfiltrering med avhuggningsvinkelfrekvens α (LP_α -filtrering) och multiplikation med T .*

Bevis. Impulståget $s_T(t)$ har Fourierserieutvecklingen

$$s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t}, \quad \text{där} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_T(t) e^{-in\Omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-in\Omega t} dt = \frac{1}{T}.$$

Den samplade signalen är $f(t)s_T(t)$, och genom Fouriertransformering erhålles

$$f(t)s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{in\Omega t} f(t) \supset \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega - n\Omega).$$

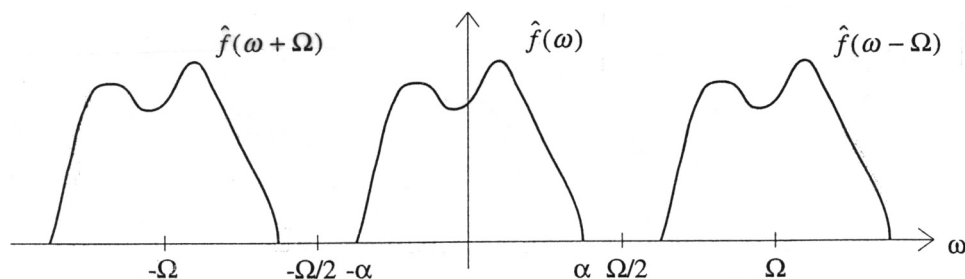
LP_α -filtrering innebär på transformsidan multiplikation med

$$\hat{h}_\alpha(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{då } |\omega| \leq \alpha, \\ 0, & \text{då } |\omega| > \alpha. \end{cases}$$

Efter sampling, LP_α -filtrering och multiplikation med T fås

$$TLP_\alpha(f(t)s_T(t)) \supset \hat{h}_\alpha(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega - n\Omega).$$

Av termerna i summan är det bara den för $n = 0$ som är $\neq 0$ i frekvensbandet $|\omega| \leq \alpha$ (se fig.).



Därför är

$$\hat{h}_\alpha(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega - n\Omega) = \hat{f}(\omega),$$

och

$$TLP_\alpha(f(t)s_T(t)) = f(t).$$

□

Övningsexempel.

- 1) Antag samma förutsättningar som i samplingsteoremet. Visa att

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \frac{T \sin(\alpha(t - nT))}{\pi(t - nT)}.$$

- 2) Signalen $f(t)$ har Fouriertransformen $\hat{f}(\omega) = \theta(\omega + \alpha) - \theta(\omega - \alpha)$, där $\alpha > 0$ är en given gränsvinkelfrekvens. Signalen samplas med vinkelfrekvensen $\Omega > \alpha$, dvs. man bildar

$$f_s(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT),$$

där $\Omega T = 2\pi$. Denna låpassfiltreras sedan med avhuggningsvinkelfrekvens α (idealt låpassfilter). Låt $g(t)$ vara resultatet av sampling och filtrering. Beräkna

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)|^2 dt.$$

Svar.

2. 0 om $\Omega \geq 2\alpha$; $\frac{1}{\pi}(2\alpha - \Omega)$ om $\alpha < \Omega < 2\alpha$.