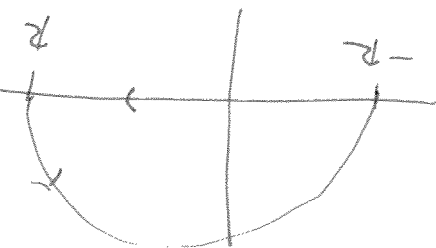


1. Beräkna först

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{iax}}{(1+x^2)(4+x^2)} dx \quad \text{för } a > 0.$$

Låt γ_R vara en kurva enligt fig

$$\text{Sätt } f(z) = \frac{z e^{iaz}}{(1+z^2)(4+z^2)}$$



Om $\text{Im } z > 0$ så $|e^{iaz}| = e^{-ay} \leq 1$.

$$\therefore |f(z)| \leq \frac{|z|}{|z^2+1||z^2+4|} \leq \frac{R}{R(R^2-1)(R^2-4)} \quad (1)$$

om $|z| = R > 4$.

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \left[\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, 2i) \right] =$$

$$= 2\pi i \left[\frac{1 \cdot e^{-a}}{2i(4-1)} + \frac{2! e^{-2a}}{4! (1-4)} \right] =$$

$$= \pi i \left[\frac{3}{2} e^{-a} - \frac{3}{2} e^{-2a} \right]$$

$$\Leftrightarrow (1) \Rightarrow \left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi R^2}{R^2-1)(R^2-4)} \xrightarrow[0 < \theta < \pi]{z = Re^{i\theta}} \rightarrow 0$$

$$\therefore I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{iax}}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz =$$

$$= i\pi \left[\frac{1}{e^{-a}} - \frac{1}{e^{-2a}} \right] \quad a > 0.$$

Observer sedan att eftersom $x \cos ax$ är udda så gäller

$$I = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{(x^2+1)(x^2+4)} dx, \text{ som byter tecken, då } a \text{ byter tecken.}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{iax}}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \operatorname{sign}(a) i\pi \left[\frac{1}{e^{-|a|}} - \frac{1}{e^{-2|a|}} \right]$$

$$\& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{3}{\pi} [e^{-1} - e^{-2}]$$

2. a) Partialbruchzerlegung sein

$$f = \frac{z}{(z+2)(z-3)} = \frac{5}{9} \frac{z+2}{z-3} + \frac{3}{5} \frac{1}{z-3}$$

$$|z| > 2 \Rightarrow \frac{1}{z+2} = \frac{z}{1+\frac{2}{z}} = \frac{z}{1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{z} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1} (-2)^n}{z^{n+1}}$$

$$|z| < 3 \Rightarrow \frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{3^{n+1}}$$

$$\therefore f = \frac{1}{z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{3^{n+1}} \right)$$

b) f has poles: $z = -2$ & $z = 3$

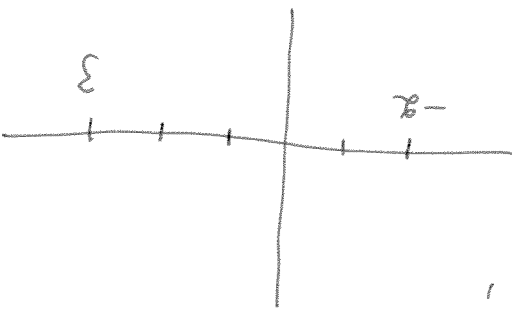
f an alle holomorph!

Ringsumgebung

I $|z+1| < 2$

II $2 < |z+1| < 3$

III $3 < |z+1|$

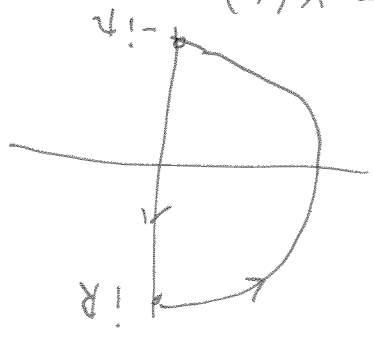


och kann L-serie entwickeln.

3a) $p(z) = z^5 - 3z^4 + 2z - 1$

har argumentvariation $\approx 5\pi$ på halvcirkeln
! fig. om $R > 0$.

på intervallet på Im-axeln $\tilde{a}_1 z = it$ &



$p(z) = -3z^4 - 1 + i(t^5 + 2t) = X(t) + iY(t)$

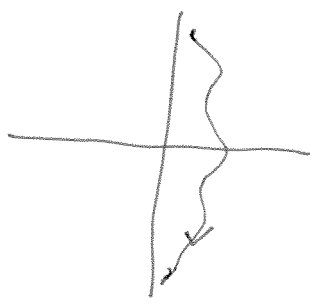
här $\tilde{a}_1 X(t) < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

När $z = -iR$ är argumentet nästan $-\pi/2$
När $z = +iR$ är argumentet nästan $\pi/2$.

$\therefore$ arvar på $[-iR, iR] \approx -\pi$

Totala variationen är alltså

$5\pi - \pi = 4\pi$ & antalet höllf.



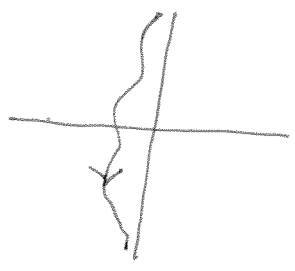
$= \frac{4\pi}{2\pi} = 2$.

b) $q(z) = z^5 + 3z^4 + 2z + 1$. Då blir motsv.

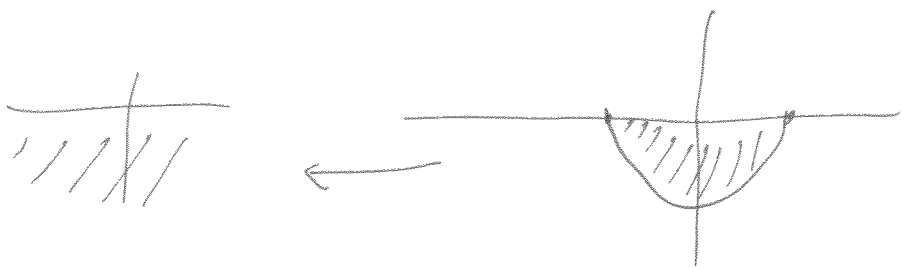
Kurva, så arvan = π

Totala variationen = 6π &

antalet höllfällen = 3.



Obs. $q(z) = -p(-z)$, så q har lika många höllfällen! vänstra HP som p har i högra.



(!) avbildar -1 på 0 & 1 på ∞ :

$$T(z) = \frac{z+1}{1-z}$$

Då går Re-axeln på Re-axeln

$$T(i) = \frac{1+i}{1-i} = \frac{2}{(1+i)^2} = i$$

$\therefore$ övre halvplanet $\rightarrow$ övre halvplanet.

enhetscirkeln går på en linje genom origo som innehåller $T(i)=i$, dvs Im-axeln. $T(0)=1 \Rightarrow$

$$\{ |z| < 1 \} \rightarrow \text{Högra halvplanet.}$$

(!!) Halvcirkeln avbildas alltså på snittet av högra & övre halvplanet, dvs

högra kvadranten.

$$z \rightarrow T(z) = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2$$

avbildar alltså övre halvplanet på övre halvplanet.

b) $w \rightarrow z^w$ avbildar på följande sätt.

$$\therefore f(w) = T(z^w) = \left(\frac{1+z^w}{1-z^w} \right)^2$$

c) Addenda!

erlicht Cauchy's Integralsatz

$$= \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = 0 \quad |w|=1$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-z} i e^{i\theta} d\theta$$

Cauchy's integral formula.

$$= \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = f(z), \text{ erlicht} \quad |w|=1$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-z} i e^{i\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-z} i e^{i\theta} d\theta$$

6

7

6. Lösung 1: Residuensatz

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{f(w)}{p(w)} \frac{w-z}{w-z} dw =$$

$$= \sum \text{Res} = f(z) \frac{p'(z)}{p(z)} + \sum \frac{f(a_j)}{a_j - z} \frac{p'(a_j)}{p'(a_j)}$$

$$= f(z) + Q(z)$$

$$E_{\text{fensen}} \quad p(a_j) = 0 \quad \text{an} \quad p(z)/(a_j - z)$$

eff. polynom, für Q an eff. polynom

$$E_{\text{fensen}} \quad p(a_j) = 0 \quad \text{für} \quad I \quad \text{an} \quad \text{deben} \quad \text{muss} \quad p$$

Lösung 2:

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{f(w)}{p(w)} \frac{w-z}{w-z} dw +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{f(w)}{p(w)} dw = R(z) + f(z)$$

Neu $\frac{p(z)-p(w)}{p(z)-p(w)}$ an eff. polynom: z , für R okkass.