

MVE 025 & 295; 13/1 - 12

Lösningen:

1. a) Låt $f = \frac{z^4}{4z^2-1}$

integralen $\tilde{a} \int_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \sum \text{Res}$

$$f = \frac{z^4}{g(z)} \quad g(z) = 0 \quad \text{för} \quad z = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{Res}\left(f, \frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{g'\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1/16}{4} = \frac{1}{64}$$

$$\text{Res}\left(f, -\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^4}{g'\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{64}$$

$$\therefore \sum \text{Res} = 0 \quad ; \quad \Rightarrow \quad \int_{|z|=1} f dz = 0.$$

b) Denna uppgift kan lösas på liknande sätt (residuer i $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$)

men här är en annan möjlighet:

Eftersom alla poler till
 $f := \frac{z^2}{4z^2-1}$ ligger innanför

Konturen $\tilde{\gamma}$

2

$$\int_{|z|=1} f dz = \int_{|z|=R} f dz \quad \text{om } R > 1.$$

~~Låt~~ Men

$$\left| \int_{|z|=R} f dz \right| \leq \frac{R^2}{4R^4 - 1} \cdot 2\pi R \rightarrow 0 \quad R \rightarrow \infty$$

$$\therefore \int_{|z|=1} f dz = 0.$$

* * * *
Alternativt följer både a) b) av : holo

Prop. Låt f vara en jämn funktion $f(z) = f(-z)$, på kurvan $|z|=1$. Då $\tilde{\gamma} \int_{|z|=1} f dz = 0$.

ber. $\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) i e^{i\theta} d\theta = \int_{\theta=\varphi+\pi}^{\theta=\varphi} f(e^{i\theta}) i e^{i\theta} d\theta$

$$= - \int_{-\pi}^{\pi} f(-e^{i\varphi}) i e^{i\varphi} d\varphi = - \int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) i e^{i\varphi} d\varphi$$

$\therefore \int = 0.$

3.

$$2) \quad \sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$$

$$\text{Låt} \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{Vi vet att} \quad \hat{g}(a) = \pi e^{-|a|}$$

(genom en residueräkning som står i boken).

$$\therefore \hat{f}(a) = \left(\int \frac{e^{ix} e^{-ix \cdot a}}{1+x^2} - \int \frac{e^{-ix} e^{-ix \cdot a}}{(1+x^2)} \right) \times$$

$$\times \frac{1}{2i} =$$

$$= [\hat{g}(a-i) - \hat{g}(a+i)]/2i =$$

$$= \frac{\pi}{2i} [e^{-|a-i|} - e^{-|a+i|}]$$

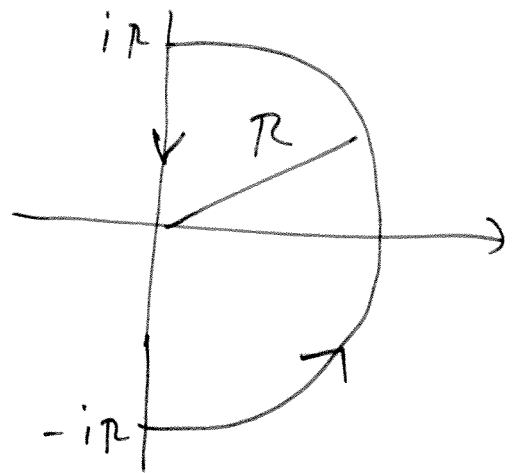
B

3: Låt Γ_R vara konturen 4.

Om R stort
ligger alla lösn.

All

$$z + e^{-z} \neq 2$$



innanför Γ_R ty

$$|z + e^{-z}| \geq R - |e^{-z}| \geq R - 1 > 2$$

$$\text{om } |z| > R > 2.$$

För att beräkna # lösn. inant.
 Γ_R använder vi Rouché:

$$\text{Låt } f(z) = z - 2, \quad g(z) = e^{-z}$$

På Γ_R :

$$|f(z)| \geq R - 2 \quad (|z| = R)$$

$$|f(z)| \geq \sqrt{17} > 2 \quad (z = i7)$$

$$|g(z)| \leq 1 \quad (\text{ty } \operatorname{Re} z > 0)$$

5.
 $\therefore f$ och $f+g$ har lika
många nollst. inuansför Γ_n

Eftersom $z-2$ har ett
nollst. gäller samma sak för

$$z-2 + e^{-z}$$

$\square$

6.

4. Laplace transform ger:

$$s^2 \tilde{u} - su(0) - u'(0) + \tilde{u} = \tilde{f}$$

Begynnelsevärdena: $u(0)=1$, $u'(0)=0$.

$$\therefore (s^2+1)\tilde{u} = \tilde{f} + s$$

$$\therefore \tilde{u} = \tilde{f} \cdot \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1}$$

Nu vet vi att

$$\frac{s}{s^2+1} = \widetilde{\cos t} ; \quad \frac{1}{s^2+1} = \widetilde{\sin t}$$

$$\therefore u = f * \sin + \cos t.$$

Här är

$$f * \sin(t) = \int_0^t f(s) \sin(t-s) ds$$

(obs: inte $f \cdot \sin t$!!)

7.

$$b) \quad f = \begin{cases} 1 & t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

gen

$$f * \sin(t) = \int_0^1 \sin(t-s) ds =$$

$$= \cos(t-s) \Big|_{s=0}^{s=1} = \cos(t-1) - \cos t$$

om $t \geq 1$!

$$f * \sin t = \int_0^t \sin(t-s) ds = \cos(t-s) \Big|_0^t =$$

$$= 1 - \cos t \quad \text{om} \quad t \leq 1 !$$

Det går inte att lösa
 uppg. separat för $t < 1$
 & $t > 1$.

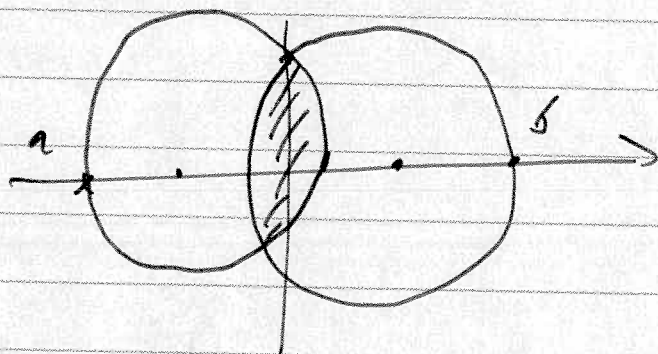
5. Cirkularna $|z-1|=\sqrt{2}$ & $|z+1|=\sqrt{2}$

skär varandra då

$$(x-1)^2 + y^2 = 2 \quad \& \quad (x+1)^2 + y^2 = 2$$

$$\Rightarrow x=0 \Rightarrow y=\pm 1 \quad \therefore z=\pm i$$

$\therefore$ Området $\bar{a}$



Lag en Möbiusavb. som avbildar skärningspt på 0, respektive ∞ .

$$F(z) = \frac{z+i}{z-i}, \quad \text{Då går var och}$$

en av cirkularna på en

linje genom origo. Vilka linjer?

$$F(a) = F(-1-\sqrt{2}) = \frac{i-1-\sqrt{2}}{-i-1-\sqrt{2}} =$$

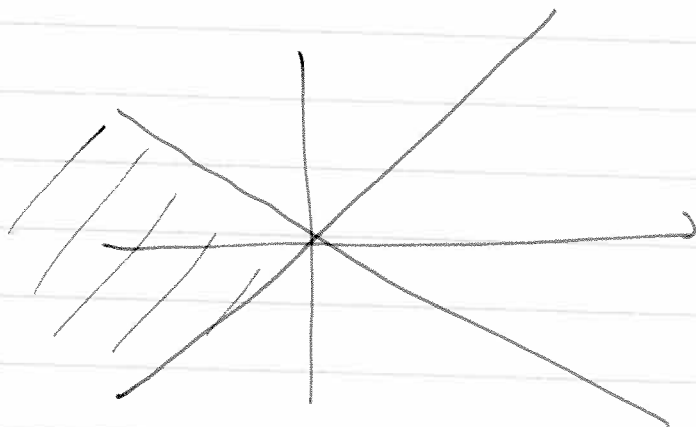
$$= \frac{(1+\sqrt{2}-i)(1+\sqrt{2}-i)}{(1+\sqrt{2})^2 + 1^2} = \frac{(1+\sqrt{2})^2 - 1 - 2i(1+\sqrt{2})}{2+2+2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2 + 2\sqrt{2} - i(2 + 2\sqrt{2})}{\text{hgt}}$$

$\therefore F(a)$ har arg. $-\frac{\pi}{4}$

P.s.s. $F(b)$ — $\frac{\pi}{4}$

$\therefore$ Linjerna är



Delar planet i 4 delar. vi letar efter delen som innehåller $F(0) = -1$; det skuggade området i bilden. $w \rightarrow w^2$ av bilden

$$\left\{ \frac{3\pi}{4} < \arg w < \frac{5\pi}{4} \right\} \rightarrow \left\{ z ; \frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{5\pi}{2} \right\}$$

= högra halvplanet.

$$\therefore \left(\frac{z+i}{z-i} \right)^2 \text{ dugen.}$$

9

8. $|f(z)| \leq e^x = |e^z|$

$$\therefore |e^{-z} f(z)| \leq 1.$$

Men $e^{-z} f(z)$ är en

hel funktion så $|e^{-z} f(z)| = c.$

$$\therefore f(z) = c e^{+z} \quad \text{där}$$

c konstant $|c| \leq 1.$

