

Argumentprincipen (Satz 3.2R):

Antag f meromorf i G , γ styckviset glätt slutet enkel nollhomotop positivt orienterad kurva som dessutom undviker f 's nollställen och poler.

Da gäller att $W(f(\gamma)) = N(f, \gamma) - P(f, \gamma)$, där

$N(f, \gamma) := \#$ nollst. till f i $\text{int}(\gamma)$ räknat med multiplicitet

$P(f, \gamma) := \#$ poler

Basis: Av topologiska skäl är $N(f, \gamma) < \infty$ och $P(f, \gamma) < \infty$.

Vi numererar nollställena till f i $\text{int}(\gamma)$: $z_1, \dots, z_N$, $n_i := \text{ordn. av } z_i$.

Vi numererar också polerna till f i $\text{int}(\gamma)$: $w_1, \dots, w_M$, $m_j := \text{ordn. av } w_j$.

Upprepad användning av Satserna klassifikation av nollställen och klassifikation av isol. sing. ger att:

$$f(z) = \prod_{i=1}^N (z - z_i)^{n_i} \prod_{j=1}^M (z - w_j)^{-m_j} g(z), \text{ där } g \text{ är helt i } G \text{ och}$$

$g \neq 0$ i $\text{int}(\gamma)$. Med produktregeln för komplexa-derivaten får vi

$$(*) \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{i=1}^N \frac{n_i}{z - z_i} - \sum_{j=1}^M \frac{m_j}{z - w_j} + \frac{g'(z)}{g(z)}, \text{ vi noterar att } \frac{g'}{g} \text{ helt i } \text{int}(\gamma).$$

$$\text{Vi får nu } W(f(\gamma)) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz}_{\text{enk. obs. } f(\gamma)} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{1}{f(\gamma(t))} (f \circ \gamma)'(t) dt =$$

$$= \left[\text{"kedje-regeln": } (f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)) \gamma'(t) \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} dz \stackrel{\text{Residu-satsen}}{=} \sum_{i=1}^N \text{Res}_{z_i} \frac{f'}{f} + \sum_{j=1}^M \text{Res}_{w_j} \frac{f'}{f}. \text{ Från } (*) \text{ ser}$$

vi att $\text{Res}_{z_i} \frac{f'}{f} = n_i$ samt $\text{Res}_{w_j} \frac{f'}{f} = -m_j$, så sammanfattat får

$$\text{vi } W(f(\gamma)) = \sum_{i=1}^N n_i - \sum_{j=1}^M m_j = N(f, \gamma) - P(f, \gamma). \quad \square$$