Sats 2.3 PB:

Om $f \in C^1$ är f differentierbar, dvs

$$f(x_0+t, y_0+s) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)t + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)s + o(\sqrt{t^2+s^2}).$$

Sats 2.15 (Cauchy-Riemanns ekvationer):

a) Om $f = u + iv$ holo i G så löser u, v CRs ekvationer:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}, \quad \text{alt.} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y} \quad (= f').$$

b) Om $f \in C^1$ (dvs f har kont. partiella derivator), och dessa uppfyller CRs ekv. så är f holo.

Bevis av b):

Vill visa att för godt. punkt $z_0 \in G$ så är f komplext deriverbar i z_0, dvs gränsvärdet

$$\lim_{t+is \to 0} \frac{f(z_0+t+is) - f(z_0)}{t+is} \quad \text{existerar.}$$

Enligt antagande är $f \in C^1$ och är därför differentierbar.

Vi får:

$$f(z_0+t+is) - f(z_0) = f(x_0+t, y_0+s) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}t + \frac{\partial f}{\partial y}s + o(|t+is|) =$$

CRs ekv!

$$= \frac{\partial f}{\partial x}t + i\frac{\partial f}{\partial x}s + o(|t+is|) = \frac{\partial f}{\partial x}(t+is) + o(|t+is|),$$

$$\Rightarrow \frac{f(z_0+t+is) - f(z_0)}{t+is} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{o(|t+is|)}{t+is} \xrightarrow[t+is \to 0]{} \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Detta visar att $f'(z_0)$ existerar, dvs f holo i G. $\square$

Sats 8.14$^+$ (Klassifikation av nollställen):

f holo i G, $f(a)=0$, $a\in G$, då antingen:

i) $f\equiv 0$ eller

ii) $f(z)=(z-a)^m g(z)$, $m\in\mathbb{N}_{>0}$, g holo i G, $g(a)\neq 0$.

I fall ii) gäller $f\neq 0$ i någon punkterad cirkelskiva $D(a,\varepsilon)^\times := D(a,\varepsilon)\setminus\{a\}$, $\varepsilon>0$, och vi säger att a är ett <u>nollställe av ordning m</u>.

<u>Bevis:</u> G är öppen så $D(a,r)\subseteq G$ för något $r>0$,

Taylorutveckling ger: $f(z)=\sum_0^\infty c_k(z-a)^k$ i $D(a,r)$.

- Om $c_m\neq 0$ för något m, då finns ett minsta sådant m, och då $c_0=f(a)=0$ enl. antagande måste $m\geq 1$.

Får $f(z)=\sum_{k=m}^\infty c_k(z-a)^k=(z-a)^m\sum_{k=0}^\infty c_{k+m}(z-a)^k=(z-a)^m g(z)$.

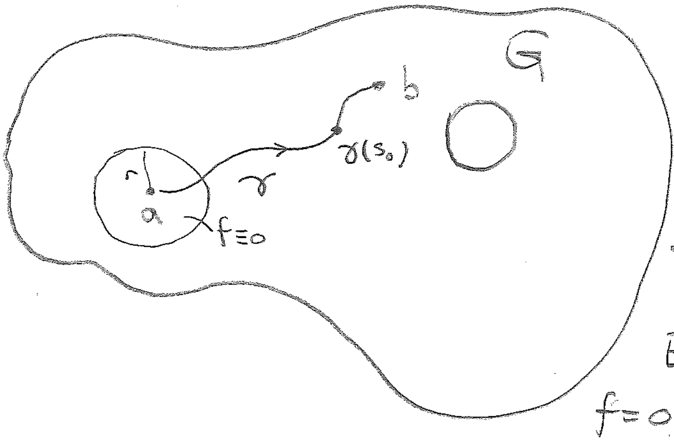
$g(z)$ ges av konvergent potensserie så är holo i $D(a,r)$.

I $G\setminus\{a\}$ kan vi skriva $g(z)=\dfrac{f(z)}{(z-a)^m}$, så på ~~detta sätt~~ får vi g holo i $D(a,r)\cup G\setminus\{a\}=G$.

Har också $g(a)=c_m\neq 0$ enl. antagande, så vi har fall ii). $g(a)\neq 0 \Rightarrow g\neq 0$ i $D(a,\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ då g kont, $\Rightarrow f\neq 0$ i $D(a,\varepsilon)$.

(fortsättning på nästa sida)

• Om istället $c_k = 0 \ \forall k \Rightarrow f \equiv 0$ i $D(a,r)$.



Låt $\gamma(t)$, $t \in [0,1]$, vara kurva mellan a och godtycklig punkt $b \in G$.

Låt $s_0 := \max\{s \geq 0 : f(\gamma(t)) = 0 \ \forall t \leq s\}$.

Då är $f(\gamma(s_0)) = 0$ p.g.a kont.

Enl. def. av s_0 är $f = 0$ i punkter $\gamma(t)$ godtyckligt nära $\gamma(s_0) \Rightarrow f \equiv 0$ i närheten av $\gamma(s_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow s_0 = 1$ dvs $f(b) = 0$ (ty annars hade $f(\gamma(t)) = 0 \ \forall t \leq s$ för något $s > s_0$ vilket är en motsägelse).

Detta visar $f \equiv 0$ i G, dvs vi är i fall i). $\square$

Sats 8.15/16 (Identitetsprincipen):

Antag f, g holo i område G, $f(a_n) = g(a_n)$ där a_n följd av distinkta punkter i G, och att $a_n \longrightarrow a \in G$. Då är $f \equiv g$ i G.

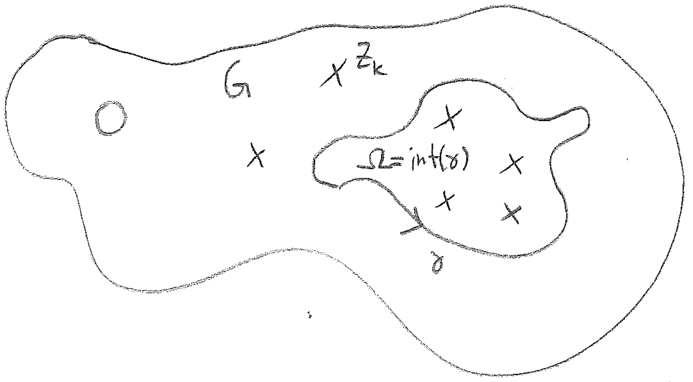
Bevis: Sätt $h(z) := f(z) - g(z)$, då h holo i G och $h(a_n) = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$. Då h kont. får vi

$h(a) = \lim_{n \to \infty} h(a_n) = 0$. Nollstället a kan inte ha ordning m då $h \neq 0$ godt. nära a, så Klass. av nollställen $\Rightarrow$ $h \equiv 0$ dvs $f \equiv g$ i G. $\square$

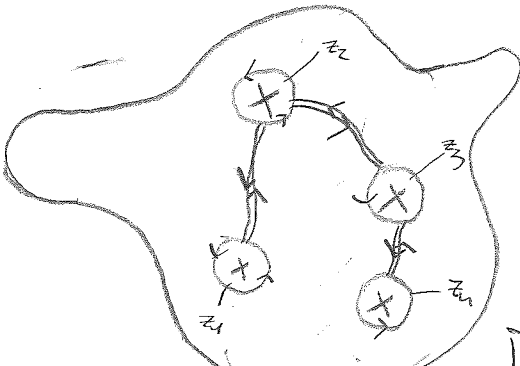
Sats 9.10 (Residysatsen v2):

Antag f holo i G förutom isolerade singulariteter z_k, γ styckvis glatt sluten enkel positivt orienterad kurva i G, $\gamma \sim_G 0$. Då gäller:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_k \in \mathrm{int}(\gamma)} \mathrm{Res}_{z_k} f.$$



Låt singulariteterna i $\Omega := \mathrm{int}(\gamma)$ vara numrerade $z_1, \dots, z_N$. Välj små cirklar $C(z_k, \varepsilon_k)$ runt varje z_k sådana att $\overline{D(z_k, \varepsilon_k)} \subseteq \Omega$ och så att de ej skär varandra. Låt nu γ' vara kurva som på bilden:



Dvs totalt går γ' runt varje cirkel $C(z_k, \varepsilon_k)$ en gång i pos. riktning, medan γ' passerar kurvorna som förbinder $C(z_k, \varepsilon_k)$ med $C(z_{k+1}, \varepsilon_{k+1})$ en gång i varsin riktning.

Det är nu ett topologiskt faktum att:

$\gamma \sim_{G \setminus \{z_1, \dots, z_N\}} \gamma'$. Cauchys sats implicerar därför:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma'} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{|z-z_k| = \varepsilon_k} f(z)\,dz \overset{\text{Residysatsen v1!}}{=} 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}_{z_k} f =$$

$$= 2\pi i \sum_{z_k \in \mathrm{int}(\gamma)} \mathrm{Res}_{z_k} f. \qquad \blacksquare$$

Def: Låt γ vara sluten kurva i $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, då def.

vindningstalet $W(\gamma) := \#$ varv γ går runt 0 i pos. riktning,

så $W(\gamma) = m$ omm $\gamma \sim_{\mathbb{C}\setminus\{0\}} {}^m C(0,1)$ $*$

Det följer från $*$ att om γ dessutom är styckvist glatt:

$$W(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz.$$

Om f holo, $f \neq 0$ på γ, så def:

$W(f,\gamma) := W(f(\gamma))$.

Sats 3.2 R (Argumentprincipen v2):

Låt f och γ vara som i Arg. princ. v1 (så $f \neq 0$ på γ).

Då $W(f,\gamma) = N(f,\gamma) - P(f,\gamma)$.

Bevis: $W(f,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{f(\gamma)} \frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{1}{f(\gamma(t))} f(\gamma(t))'\,dt =$ ← kedjeregeln

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\gamma'(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N(f,\gamma) - P(f,\gamma). \quad \square$$

← Arg. princ. v1!

Sats 9.18 (Rouchés sats):

Antag f, g holo i G, γ pos. orienterad sluten enkel st. gl. kurva, $\gamma \sim_G 0$. och anta också $|f(z)| > |g(z)|$ $\forall z \in \gamma$. Då har f och $f+g$ lika många nollställen i det inre av γ.

Bevis: Låt $s \in [0,1]$. $|f(\gamma(t))| > |g(\gamma(t))| \Rightarrow$

$$\Rightarrow |f(\gamma(t)) + s g(\gamma(t))| \geq |f(\gamma(t))| - s|g(\gamma(t))| > 0$$

omvända triangelolik.

Så speciellt $f(\gamma(t)) + s g(\gamma(t)) \neq 0$.

Följer att $f(\gamma(t)) + s g(\gamma(t))$ är en homotopi mellan $f(\gamma(t))$ och $f(\gamma(t)) + g(\gamma(t))$ i $\underline{\mathbb{C} \setminus \{0\}}$, så $W(f,\gamma) = W(f+g,\gamma)$. Argumentprincipen v2 implicerar därför att $N(f,\gamma) = N(f+g,\gamma)$ ($P(f,\gamma) = P(f+g,\gamma) = 0$ då $f, f+g$ holo). $\square$