# 1 Tenta i komplex analys, F/ Kf och TM, MVE 025 och MVE 295

2014 10 30, 08.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Bo Berndtsson (L)/Elin Solberg (V) 0703-088304

---

1. Hur många lösningar har ekvationen
$$5z^4 - z^3 + z = 1/17$$
i området $\{z; 1/2 < |z| < 1\}$? (7p)

2. Beräkna integralen
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 2ax + b} dx,$$
för $a$ och $b$ reella konstanter sådana att $a^2 < b$.

   (7p)

3. Bestäm en konform avbildning som avbildar området $\{z; |z-1| > 1 \ \& \ Im(z) > 0\}$ på övre halvplanet.

   (7p)

4. a) Lös den ordinära differentialekvationen
$$u''(t) - 5u'(t) + 6u(t) = e^t$$
för $t > 0$, med begynnelsevärdena $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$ med hjälp av Laplacetransformering. (4p)

   b) Samma uppgift för ekvationen
$$u''(t) - 5u'(t) + 6u(t) = g(t),$$
där $g$ är en allmän funktion på positiva halvaxeln som uppfyller $|g(t)| \leq Ae^{Bt}$ för några konstanter $A$ och $B$.

5. Låt
$$f(z) = \frac{e^z}{1 - \cos z}.$$
a) Vad är ordningen (multipliciteten) av polen till $f$ i origo? (2p)

   b) Vad är residyn till $f$ i origo? (4p)

   c) beräkna integralen
$$\int_{|z|=1} f(z) dz.$$
(1p)

6. Visa att om en funktion $f$ är holomorf i en cirkelskiva $\{z; |z-a| < r\}$ så kan den utvecklas i potensserie där. Ge också formeln för koefficienterna. (5p)

7. Formulera och bevisa identitetsprincipen för holomorfa funktioner.

   (5p)

8. Låt $f$ vara ett polynom $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + ...a_n$, med nollställena $z_j$. Visa att
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f'}{f} z dz = -a_1 = \sum_1^n z_j,$$
om $R$ är tillräckligt stort. (5p)

Lycka till!,
BB