Tenta i MVE025/MVE295, Komplex (matematisk) analys, F2 och TM2/Kf2

2016 10 27, 08.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Håkon Strand Bölviken, 031-7725325

Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39 (4), 40-50 (5)

---

1. Lös med hjälp av Laplacetransform begynnelsevärdesproblemet

$$u''(t) - 2u'(t) + u(t) = te^t, \qquad t > 0,$$

   med begynnelsevärdesvillkor $u(0) = 1$ och $u'(0) = 1$. (5p)

2. Bestäm antalet nollställen till polynomet $p(z) := z^7 + z^3 + 1$ i områdena:

   a) $D(0, 2) := \{z : |z| < 2\}$, (2p)

   b) första kvadranten, dvs $\{z : z \neq 0, 0 < \text{Arg}(z) < \pi/2\}$. (4p)

3. Beräkna integralen

$$\int_{|z+1|=2} \frac{(z-1)^2}{z^2(z+1)} dz$$

   på två sätt:

   a) genom att använda residykalkyl, (5p)

   b) genom att först utveckla $\frac{(z-1)^2}{z^2(z+1)}$ som en Laurentserie centrerad i punkten -1 och giltig i området $\{z : |z+1| > 1\}$. (Glöm inte att sen bestämma integralen!) (5p)

4. Hitta en konform avbildning som avbildar området $G := \{z : |z| < 1\} \cap \{z : \text{Re}(z) > 0\}$ på:

   a) öppna övre halvplanet, (5p)

   b) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ (dvs $\mathbb{C}$ förutom de ickenegativa reella talen). (2p)

5. Använd residykalkyl för att beräkna integralen

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3} dx.$$

   (Tips: integrera längs ränderna till cirkelsektorerna
   $\{z : z \neq 0, 0 < \text{Arg}(z) < 2\pi/3\} \cap \{z : |z| < R\}, R \gg 1$.)
   Utför de nödvändiga uppskattningarna. (7p)

6. Formulera och bevisa satsen om Taylorutveckling av holomorfa funktioner. (5p)

7. Formulera och bevisa Rouchés sats. (5p)

8. Låt u och v vara två harmoniska funktioner i $\mathbb{C}$. Antag dessutom att $\nabla u = \nabla v$ på $\mathbb{R}$ (∇u och ∇v betecknar gradienten av u respektive v). Använd identitetsprincipen för att visa att $u - v$ är konstant i $\mathbb{C}$. (5p)

Lycka till!
David