Tenta i MVE025/MVE295, Komplex (matematisk) analys, F2 och TM2/Kf2

2017 08 25, 14.00-18.00

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Zuzana Nedelkova, 031-7725325

Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39 (4), 40-50 (5)

---

1. Lös med hjälp av Laplacetransform begynnelsevärdesproblemet
$$u''(t) + 3u'(t) + 2u(t) = \sin t, \qquad t > 0,$$
med begynnelsevillkor $u(0) = 1$ och $u'(0) = 0$. (7p)

2. Bestäm antalet nollställen till polynomet $p(z) := z^5 - 3z^4 + 3z - 1$ i områdena:
   a) $D(0,2) := \{z : |z| < 2\}$, (3p)
   b) det vänstra halvplanet $\{z : \text{Re } z < 0\}$. (4p)

3. Använd residykalkyl för att beräkna integralen
$$\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{x^4 + 2x^2 + 1} dx.$$
(7p)

4. Låt K vara kvadraten med hörn i punkterna $\{2 - i, -2 - i, i, -3i\}$. Bestäm bilden av K under avbildningen
$$f(z) := \frac{1}{iz - 1}.$$
(7p)

5. Låt
$$f(z) := \frac{e^{-z}}{z(\cos(z) - 1)}.$$
   a) Vilken ordning har f:s pol i punkten 0? (1p)
   b) Bestäm de fyra första nollskilda termerna i f:s Laurentserie giltig i området $\{z : 0 < |z| < 2\pi\}$. (5p)
   c) Bestäm integralen
$$\int_{|z|=1} f(z)dz.$$
(1p)

6. Formulera och bevisa Liouvilles sats. (5p)

7. Visa att om en komplex funktion $f(z) := u(z) + iv(z)$ har kontinuerliga partiella derivator och dessa uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer så är funktionen holomorf. (5p)

8. Låt f och g vara hela funktioner (dvs holomorfa i hela $\mathbb{C}$) sådana att $|f| = |g|$ på $C(0,1) := \{z : |z| = 1\}$ samt $|f| \leq |g| \leq 2|f|$ på $D(0,2)$. Visa att det finns ett tal $a \in \mathbb{C}$ sådant att $f = ag$ på hela $\mathbb{C}$.

(5p)

Lycka till!
David