Tenta i MVE025/MVE295, Komplex (matematisk) analys, F2 och TM2/Kf2

2017 08 25, 14.00-18.00

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Zuzana Nedelkova, 031-7725325

Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39 (4), 40-50 (5)

---

1. Lös med hjälp av Laplacetransform begynnelsevärdesproblemet

$$u''(t) + 3u'(t) + 2u(t) = \sin t, \qquad t > 0,$$

med begynnelsevillkor $u(0) = 1$ och $u'(0) = 0$. (7p)

Lösning:

Vi tar Laplacetransformen på båda sidor och får efter partialbråksuppdelning

$$\tilde{u}(s) = \frac{5}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{6}{5}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{10}\frac{1}{1+s^2} - \frac{3}{10}\frac{s}{s^2+1},$$

vilket leder till lösningen

$$u(t) = \frac{5}{2}e^{-t} - \frac{6}{5}e^{-2t} + \frac{1}{10}\sin t - \frac{3}{10}\cos t.$$

2. Bestäm antalet nollställen till polynomet $p(z) := z^5 - 3z^4 + 3z - 1$ i områdena:

a) $D(0,2) := \{z : |z| < 2\}$, (3p)

b) det vänstra halvplanet $\{z : \text{Re } z < 0\}$. (4p)

Lösning:

a) Skriv $p = f + g$ där $f(z) := -3z^4$ och $g(z) := z^5 + 3z - 1$. Vi har då att $|f| = 48$ på $\partial D(0,2)$ medan mha triangelolikheten $|g| \leq |z^5| + 3|z| + 1 \leq 39$ på $\partial D(0,2)$. Alltså har vi $|f| > |g|$ på $\partial D(0,2)$ så enligt Rouches sats har därför p lika många nollställen som f i $D(0,2)$, dvs 4 st.

b) Vi använder argumentprincipen. Låt $\gamma_R^1(t) := Re^{it}$, $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$ och $\gamma_R^2(t) := it$, $t \in [-R, R]$, och $\sigma_R := \gamma_R^1 \cup \gamma_R^2$. Vi har att för $R >> 0$

$$arg(p(Re^{it})) \approx (Re^{it})^5 = 5t$$

så

$$argvar_{\gamma_R^1}(p(z)) \approx 5\pi.$$

Vi har att

$$p(it) = -3t^4 - 1 + i(t^5 + 3t)$$

dvs realdelen av $p(z)$ är strikt negativ längs γ_2^R. Då för $R >> 0$

$$arg(p(-iR)) \approx 3\pi/2$$

medan

$$arg(p(iR)) \approx \pi/2$$

ses enklast med figur att

$$argvar_{\gamma_R^2}(p(z)) \approx -\pi.$$

Den totala argumentvariationen längs σ_R blir därför 4π, vilket enligt argumentprincipen betyder att p har 2 nollställen i det inre av σ_R. Låter vi $R \to \infty$ får vi att p har två nollställen i vänstra halvplanet.

3. Använd residykalkyl för att beräkna integralen

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{x^4 + 2x^2 + 1} dx.$$

(7p)

Lösning:

Låt I beteckna den sökta integralen medan

$$I' := \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos 2x}{x^4 + 2x^2 + 1} dx.$$

Då funktionen är jämn ser vi att $I' = 2I$. Låt

$$f(z) := \frac{e^{2iz}}{z^4 + 2z^2 + 1}.$$

Vi har då att

$$I' = \lim_{R \to \infty} \int_{[-R,R]} \text{Re} f(z) dz = \text{Re}(\lim_{R \to \infty} \int_{[-R,R]} f(z) dz).$$

Låt $\gamma_R(t) := Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$ och $\sigma_R := [-R, R] \cup \gamma_R$. Vi ser att $|e^{2iz}| \leq e^2$ på övre halvplanet. Omvända triangelolikheten ger att

$$|z^4 + 2z^2 + 1| \geq |z^4| - 2|z^2| - 1 \geq |z^4|/2$$

för tillräckligt stora $|z|$, vilket betyder att $|f(z)| \leq 2e^2/R^4$ för stora R. Tillsammans med triangelolikheten för integraler leder detta till att

$$| \int_{\gamma_R} f(z) dz| \leq 2e^2 \pi / R^3$$

och därför

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0.$$

Alltså har vi

$$I' = \text{Re}(\lim_{R \to \infty} \int_{\sigma_R} f(z) dz).$$

Vi noterar också att

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-i)^2}$$

där

$$g(z) := \frac{e^{2iz}}{(z+i)^2}$$

är holomorf i övre halvplanet. Dvs f har endast en singularitet i övre halvplanet, i punkten i, och enligt sats är

$$Res_i f = g'(i).$$

En enkel räkning visar att $g'(i) = -3e^{-2}i/4$. Vi får enligt residysatsen att för $R > 1$,

$$\int_{\sigma_R} f(z) dz = 2\pi i Res_i f = \frac{3e^{-2}\pi}{2}.$$

Detta betyder att

$$I' = \frac{3e^{-2}\pi}{2}$$

och så tillslut

$$I = I'/2 = \frac{3e^{-2}\pi}{4}.$$

4. Låt K vara kvadraten med hörn i punkterna $\{2-i, -2-i, i, -3i\}$. Bestäm bilden av K under avbildningen
$$f(z) := \frac{1}{iz-1}.$$
(7p)

Lösning:

Vi ser först att hörnen i kvadraten K avbildas på punkterna $\{-i/2, i/2, -1/2, 1/2\}$. Vi observerar också att ∞ avbildas på 0. Det betyder att linjen genom punkterna i och $2-i$ säg avbildas på en linje eller cirkel som går genom punkterna $-1/2, -i/2$ och 0. Detta blir en cirkel med centrum i punkten $1/4(1+i)$ och med radie $1/2\sqrt{2}$. På samma sätt får vi att de andra linjerna som begränsar K avbildas på cirklarna med radie $1/2\sqrt{2}$ med centrum i punkterna $1/4(\pm1\pm i)$. Punkten $-i$ ligger i K och avbildas på ∞ vilket säger oss att bilden av K begränsas av cirklarna samt innehåller ∞ vilket blir $\hat{\mathbb{C}}$ minus de fyra slutna cirkelskivorna med centrum i punkterna $1/4(\pm1 \pm i)$ och med radie $1/2\sqrt{2}$ (syns bäst i figur).

5. Låt
$$f(z) := \frac{e^{-z}}{z(\cos(z)-1)}.$$

a) Bestäm ordningen av f:s pol i 0. (1p)

b) Bestäm de fyra första nollskilda termerna i f:s Laurentserie giltig i området $\{z : 0 < |z| < 2\pi\}$. (5p)

c) Bestäm integralen
$$\int_{|z|=1} f(z)dz.$$
(1p)

Lösning:

Vi använder Taylorutvecklingen av $\cos z$ i 0: $\cos z = 1 - z^2/2 + z^4/24 + O(z^6)$ vilket leder till att
$$\frac{1}{\cos z - 1} = -\frac{2}{z^2}(1 + \frac{z^2}{12} + O(z^4))$$
och vidare
$$\frac{e^{-z}}{z(\cos(z)-1)} = -\frac{2}{z^3}(1-z+z^2/2-z^3/6+O(z^4))(1+\frac{z^2}{12}+O(z^4)) = 2\frac{1}{z^3}-2\frac{1}{z^2}+\frac{7}{6}\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+O(z).$$

Från detta ser vi att polen var av ordning 3 samt att $Res_0 f = 7/6$. Enligt Residysatsen blir därför
$$\int_{|z|=1} f(z)dz = \frac{7}{3}\pi i.$$

6. Formulera och bevisa Liouvilles sats. (5p)

Lösning:

Se boken.

7. Visa att om en komplex funktion $f(z) := u(z) + iv(z)$ har kontinuerliga partiella derivator och dessa uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer så är funktionen holomorf. (5p)

Lösning:

Se boken

8. Låt f och g vara hela funktioner (dvs holomorfa i hela $\mathbb{C}$) sådana att $|f| = |g|$ på $C(0,1) := \{z : |z| = 1\}$ samt $|f| \leq |g| \leq 2|f|$ på $D(0,2)$. Visa att det finns ett tal $a \in \mathbb{C}$ sådant att $f = ag$. (5p)

Lösning:

Antag först att g är identiskt lika med noll. Då följer att f är identiskt lika med noll på $D(0,2)$. Då det finns ackumulationspunkter i $D(0,2)$ följer det frÃĕn identitetsprincipen att f är identiskt lika med 0 i hela $\mathbb{C}$, dvs $f = ag$ för godtyckligt a.

Vi kan nu anta att g ej identiskt lika med 0, så enligt klassifikation av nollställen har g endast isolerade nollställen. Låt z_0 vara ett av gs nollstÃd’llen i $\bar{D}(0,2)$. Då har f/g en isolerad singularitet i z_0 och enligt antagandet har vi

$$\left|\frac{f}{g}\right| \leq 1$$

i en omgivning till z_0. Enligt sats är då z_0 en hävbar singularitet till f/g, så f/g kan utvidgas till en holomorf funktion i $D(0,2)$. Enligt antagande att

$$1/2 \leq \left|\frac{f}{g}\right| \leq 1$$

i $D(0,2)$ med

$$\left|\frac{f}{g}\right| = 1$$

på $C(0,1)$. Maximummodulusprincipen säger att om maximum av absolutbeloppet av en holomorf funktion antas i en inre punkt (såsom $1 \in C(0,1)$) så är funktionen konstant, dvs f/g är konstant i $D(0,2)$. Då $D(0,2)$ har en ackululationspunkt säger Identitetsprincipen att f/g måste vara konstant i hela $\mathbb{C}$, det vill säga $f = ag$ för något tal $a \in \mathbb{C}$.

Lycka till!
David