Tenta i MVE025/MVE295, Komplex (matematisk) analys, F2 och TM2/Kf2

2017 10 26, 8.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Mattias Lennartsson, 031-7725325

Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39 (4), 40-50 (5)

---

1. a) Använd residykalkyl för att beräkna Fouriertransformen av funktionen

$$\frac{1}{x^2+7}.$$

(5p)

b) Använd resultatet i a) för att bestämma Fouriertransformen av funktionen

$$\frac{\cos x}{x^2+7}.$$

(2p)

Lösning: a) Låt

$$f(x) := \frac{1}{x^2+7},$$

då har vi enligt definition att

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{x^2+7} dx.$$

Vi sätter

$$g(z) := \frac{e^{-itz}}{z^2+7}.$$

Vi vet då att

$$\hat{f}(t) = \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]} g(z)dz.$$

Vi antar först att $t \leq 0$. Låt $\gamma_R(s) := Re^{is}, s \in [0,\pi]$ samt $\sigma_R := [-R,R] \cup \gamma_R$ som då är en sluten kurva. Vi har att

$$\left|\int_{\gamma_R} gdz\right| \leq \max_{z\in\gamma_R} \left|\frac{e^{-itz}}{z^2+7}\right| |\gamma_R| \leq \frac{\pi R}{R^2-7} \longrightarrow 0$$

då $R \to \infty$. Här använde vi först triangelolikheten för integraler, sedan att $|e^{-itz}| = e^{ty} \leq 1$ på γ_R samt att $|z^2+7| \geq |z|^2 - 7 = R^2 - 7$ på γ_R tack vare den omvända triangelolikheten. Detta implicerar att

$$\hat{f}(t) = \lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_R} gdz.$$

Vi noterar nu att $z^2+7=(z+i\sqrt{7})(z-i\sqrt{7})$ så $g(z)$ är holomorf i $\mathbb{C}$ förutom isolerade singulariteter i $\pm i\sqrt{7}$, där bara $i\sqrt{7}$ ligger i det inre av $\sigma R, R > \sqrt{R}$. Enligt räkneregler för residyer har vi att

$$Res_{i\sqrt{7}}g = \left(\frac{e^{-itz}}{z+i\sqrt{7}}\right)_{|z=i\sqrt{7}} = \frac{e^{\sqrt{7}t}}{2i\sqrt{7}}.$$

Residysatsen säger nu att

$$\int_{\sigma_R} g dz = 2\pi i Res_{i\sqrt{7}}g = \frac{\pi e^{\sqrt{7}t}}{\sqrt{7}},$$

så sammantaget får vi att för $t \le 0$ är

$$\hat{f}(t) = \frac{\pi e^{\sqrt{7}t}}{\sqrt{7}}.$$

Eftersom f är reellvärd gäller räkneregeln

$$\hat{f}(t) = \overline{\hat{f}(-t)}$$

så vi får att för $t \ge 0$ är

$$\hat{f}(t) = \frac{\pi e^{-\sqrt{7}t}}{\sqrt{7}}.$$

Sammantaget får vi därför att

$$\hat{f}(t) = \frac{\pi e^{-\sqrt{7}|t|}}{\sqrt{7}}.$$

b) Låt $h(x) := f(x)\cos x$. Eftersom

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

får vi att

$$\hat{h}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}e^{-itx}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(t-1)x}dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(t+1)x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\hat{f}(t-1) + \frac{1}{2}\hat{f}(t+1) = \frac{\pi}{2\sqrt{7}}(e^{-\sqrt{7}|t-1|} + e^{-\sqrt{7}|t+1|}).$$

2. Låt

$$f(z) := \frac{1+e^z}{1-e^z}$$

och $A := \{z : \text{Re}(z) < 0, -\pi < \text{Im}(z) < \pi\}$. Bestäm bilden $f(A)$.
(Tips: använd att $f(z) = M(e^z)$ där $M(z) := \frac{1+z}{1-z}$.) (7p)

Lösning: Vi noterar att $|e^z| = e^x$ samt att $Arg(z) = y + 2\pi k$ där $k \in \mathbb{Z}$ är valt sådant att $Arg(z) \in (-\pi, \pi]$. Det följer att bilden av A under avbildningen e^z blir

$$B := \{z : 0 < |z| < 1, -\pi < Arg(z) < \pi\} = D(0,1) \setminus (-1, 0].$$

Vi har att $f(A) = M(B)$ där $M(z) := \frac{1+z}{1-z}$ är en Möbiusavbildning. Vi noterar att $M(-1) = 0, M(0) = 1, M(1) = \infty$. Enligt sats avbildar Möbiusavbildningar linjer och cirklar på linjer och cirklar. Vi får därför att $M(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. $M((-1,0])$ måste dåvara en del av den reella axeln som förbinder punkerna 0 och 1. $M((-1,0])$ innehåller inte oÃd'ndlighetspunkten, så vi får att $M((-1,0]) = (0,1]$.

Dessutom avbildas enhetscirkeln på en cirkel eller linje som går genom 0 och ∞, dvs en linje genom origo. Eftersom enhetscirkel skär den reella axeln i rät vinkel i punkten -1 och Möbiusavbildningar enligt sats är konforma måste $M(C(0,1))$ skära den reella axeln i rät vinkel i origo, vilket implicerar att $M(C(0,1)) = i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Då $M(0) = 1$ följer det att $M(D(0,1)) = \{z : Re(z) > 0\}$. Eftersom M är en bijektion får vi slutligen att

$$f(A) = M(B) = M(D(0,1)) \setminus M((-1,0]) = \{z : Re(z) > 0\} \setminus (0,1].$$

3. a) Använd Laplacetransformen för att ge en lösningsformel för begynnelsevärdesproblemet:

$$u''(t) + 2u'(t) + 2u(t) = f(t), \qquad t \geq 0, \qquad u(0) = 1, \qquad u'(0) = 0,$$

där f är en given funktion sådan att $|f(t)| \leq Ae^{B}t$ för några $A, B \in \mathbb{R}$. (5p)

b) Bestäm lösningen u explicit (dvs inga integraler i uttrycket) när f ges av $f(t) = 1$ för $0 \leq t \leq 2\pi$ medan $f(t) = 0$ för $t > 2\pi$. (2p)

Lösning: a) Laplacetransformen av ekvationen ger att

$$(s^2 + 2s + 2)\tilde{u} = \tilde{f} + s + 2,$$

vilket vi skriver om som

$$\tilde{u} = \frac{\tilde{f}}{(s+1)^2+1} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1}.$$

Enligt räkneregler för LT har vi att

$$\mathcal{L}(e^{-t}\sin t) = \frac{1}{(s+1)^2+1}, \qquad \mathcal{L}(e^{-t}\cos t) = \frac{s+1}{(s+1)^2+1},$$

samt

$$\mathcal{L}(e^{-t}\sin t * f) = \mathcal{L}(e^{-t}\sin t)\mathcal{L}(f) = \frac{\tilde{f}}{(s+1)^2+1}.$$

Vi får alltså att $\tilde{u} = \mathcal{L}(e^{-t}\sin t * f + e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t)$ och det följer då från inversionsformeln att

$$u = e^{-t}\sin t * f + e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t.$$

b) Per definition är faltningen $e^{-t}\sin t * f$ givet av:

$$(e^{-t}\sin t * f)(t) := \int_0^t e^{-r}\sin r f(t-r)dr.$$

Då $0 \leq t \leq 2\pi$ får vi för vår givna funktion f att

$$\int_0^t e^{-r}\sin r f(t-r)dr = \int_0^t e^{-r}\sin r dr = \left[-\frac{e^{-r}}{2}(\sin r + \cos r)\right]_0^t = -\frac{e^{-t}}{2}(\sin t + \cos t) + \frac{1}{2},$$

där vi använde att $-(e^{-t}/2)(\sin t+\cos t)$ är en primitiv funktion till $e^{-t}\sin t$ (hittas mha partiell integration). Då $t \geq 2\pi$ får vi istället att

$$\int_0^t e^{-r}\sin r f(t-r)dr = \int_{t-2\pi}^t e^{-r}\sin r dr = \left[-\frac{e^{-r}}{2}(\sin r+\cos r)\right]_{t-2\pi}^t =$$
$$= \frac{e^{2\pi}-1}{2}e^{-t}(\sin t+\cos t).$$

Sammansatt betyder detta att

$$u(t) = \frac{e^{-t}}{2}(\sin t+\cos t)+\frac{1}{2} \qquad \text{då} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

medan

$$u(t) = \frac{e^{2\pi}+1}{2}e^{-t}(\sin t+\cos t) \qquad \text{då} \qquad t \geq 2\pi.$$

4. Bestäm antalet nollställen till polynomet $p(z) = z^4 - 4z + 1$ i området $G := \{z : 0 < \text{Re}(z) < 1\}$. (7p)

Lösning: Vi hittar först antalet nollställen i högra halvplanet. Låt $\gamma_R(t) := Re^{it}, t \in [-\pi/2, \pi/2]$ och $\sigma_R := [iR, -iR] \cup \gamma_R$. Vi ser att

$$p(Re^{it}) = R^4\left(e^{4it} - \frac{4i}{R^3} + \frac{1}{R^4}\right)$$

så $arg(p(Re^{it})) \approx 4t + 2\pi k$ för stora R vilket implicerar att $argvar(f(\gamma_R)) \approx 4\pi$ för stora R. Vi har också att

$$p(iy) = y^4 + 1 + i(-4y).$$

Speciellt får vi att

$$p(iR) = R^4 + 1 - 4iR$$

så $arg(p(iR)) \approx 0 + 2\pi k_1$ och vi ser också att $p(iR)$ ligger i nedre halvplanet. Vidare ser vi att

$$p(-iR) = R^4 + 1 + 4iR$$

så $arg(p(-iR)) \approx 0+2\pi k_2$ och vi ser också att $p(-iR)$ ligger i övre halvplanet. Då $Im(p(iy)) = 0$ omm $y = 0$ ser vi att kurvan $p([iR, -iR])$ endast passerar x-axeln i punkten 1. Detta betyder dels att $p \neq 0$ på den imaginära axeln, samt att kurvan $p([iR, -iR])$ ej kan gå runt 0 när den går från $p(iR)$ till $p(-iR)$ (visas bäst med figur). Detta implicerar att $argvar(p([iR, -iR])) \approx 0$. Vi får att

$$W(p(\sigma_R)) = \frac{1}{2\pi}argvar(p(\sigma_R)) = \frac{1}{2\pi}(argvar(p(\gamma_R) + argvar(p([iR, -iR]))) \approx 2$$

för stora R. Men vindningstal är heltal så vi får att för stora R är

$$W(p(\sigma_R)) = 2.$$

Argumentprincipen säger då att p har 2 nollstÃd'llen i $int(\sigma_R)$ för stora R, dvs p har 2 nollställen i det öppna högra halvplanet.

Nu ska vi hitta antalet nollställen i $\{z : Re(z) \geq 1\}$. Låt $\gamma'_R(t) := Re^{it} + 1, t \in [-\pi/2, \pi/2]$ och $\sigma'_R := [1 + iR, 1 + -iR] \cup \gamma_R$. Först noterar vi att

$$p(z+1) = z^4 + 4z^3 + 6z^2 - 2.$$

Detta ger att

$$p(Re^{it} + 1) = R^4 \left(e^{4it} + \frac{4}{R} e^{3it} + \frac{6}{R^2} e^{2it} - \frac{2}{R^4} \right)$$

så $arg(p(Re^{it} + 1)) \approx 4t + 2\pi k$ för stora R vilket implicerar att $argvar(f(\gamma'_R)) \approx 4\pi$ för stora R. Vi har också att

$$p(1 + iy) = y^4 - 6y^2 - 2 + i(-4y^3).$$

Speciellt får vi att

$$p(1 + iR) = R^4 - 6R^2 - 2 + i(-4R^3)$$

så $arg(p(1 + iR)) \approx 0 + 2\pi k_3$ och vi ser också att $p(1 + iR)$ ligger i nedre halvplanet. Vidare ser vi att

$$p(1 - iR) = R^4 - 6R^2 - 2 + i4R^3$$

så $arg(p(1 - iR)) \approx 0 + 2\pi k_4$ och vi ser också att $p(1 - iR)$ ligger i övre halvplanet. Då $Im(p(1 + iy)) = 0$ omm $y = 0$ ser vi att kurvan $p([1 + iR, 1 - iR])$ endast passerar x-axeln i punkten -2. Detta betyder dels att $p \neq 0$ på linjen $\{z : Re(z) = 1\}$, samt att kurvan $p([1+iR, 1-iR])$ går runt 0 en gång i negativ riktning när den går från $p(1+iR)$ till $p(1-iR)$ (visas bäst med figur). Detta implicerar att $argvar(p([1 + iR, 1 - iR])) \approx -2\pi$. Vi får att

$$W(p(\sigma'_R)) = \frac{1}{2\pi} argvar(p(\sigma'_R)) = \frac{1}{2\pi}(argvar(p(\gamma'_R) + argvar(p([1 + iR, 1 - iR]))) \approx 1$$

för stora R. Men vindningstal är heltal så vi får att för stora R är

$$W(p(\sigma'_R)) = 1.$$

Argumentprincipen säger då att p har 1 nollställen i $int(\sigma'_R)$ för stora R, dvs p har 1 nollställe i det öppna halvplanet $\{z : Re(z) > 1\}$. Eftersom vi såg att p inte hade några nollställen på linjen $\{z : Re(z) = 1\}$ får vi att antalet nollställen i G är lika med antalet nollställen i det öppna högra halvplanet minus antalet nollställen i det öppna halvplanet $\{z : Re(z) > 1\}$, dvs p har ett nollställe i G.

5. Beräkna integralerna:

   a)

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2} dz,$$

(4p)

   b)

$$\int_{|z|=3} \frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2} dz.$$

(3p)

Lösning: a) $f(z) := \frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2}$ är holo i $\mathbb{C}$ förutom isolerade singulariteter i punkterna 0 och 2. Av dessa ligger endast 0 i det inre av $C(0,1)$. Notera att

$$\sin(1/z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} - ... = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{-2m-1}$$

i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Vi utvecklar

$$\frac{1}{z-2} = -\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} z^k$$

och därför

$$\frac{1}{(z-2)^2} = -\left(\frac{1}{z-2}\right)' = \sum_{1}^{\infty} \frac{k+1}{2^{k+2}} z^k.$$

Sammantaget får vi

$$\frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{-2m-1}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2^{k+2}} z^k\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l z^l,$$

där (eftersom $z^{-2m-1}z^k = z^{-1}$ omm $k = 2m$)

$$c_{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \frac{2m+1}{2^{2m+2}} = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} = \frac{1}{4}\cos(1/2).$$

Alltså är

$$Res_0\left(\frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2}\right) = \frac{1}{4}\cos(1/2)$$

och Residysatser ger oss därför att

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2} dz = 2\pi i Res_0\left(\frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2}\right) = \frac{\pi i}{2}\cos(1/2).$$

b) Båda singulariteterna 0 och 2 ligger i $C(0,3)$. Enligt räkneregel för residyer har vi

$$Res_2\left(\frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2}\right) = \sin(1/z)'_{|z=2} = -\left(\frac{\cos(1/z)}{z^2}\right)_{|z=2} = -\frac{1}{4}\cos(1/2).$$

Residysatser ger oss därför att

$$\int_{|z|=3} \frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2} dz = 2\pi i\left(Res_0\left(\frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2}\right) + Res_2\left(\frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2}\right)\right) = 0.$$

Alternativ lösning av b) är att notera att Cauchys sats ger att

$$\int_{|z|=R} \frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2} dz$$

är oberoende av R då$R > 2$, samt att man kan visa att integralen går mot noll då$R \to \infty$ (mha triangelolikheten för integraler).

6. Formulera satsen om klassifikation av nollställen. Bevisa satsen i specialfallet att funktionen är holomorf i enhetsskivan $D(0, 1)$ med nollställe i punkten 0. (5p)

   Lösning: Se bok eller föreläsningsanteckningar.

7. Formulera och bevisa Rouchés sats. (5p)

   Lösning: Se bok eller föreläsningsanteckningar.

8. Visa att $\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ definierar en holomorf funktion i halvplanet $\{z : \mathrm{Re}(z) > 1\}$ (kom ihåg att $n^z := e^{z \ln n}$). ($\zeta(z)$ är känd som Reimanns zeta-funktion.) (5p)

   Lösning: Vi noterar att $|\frac{1}{n^z}| = \frac{1}{n^x}$. Vi vet också (via t ex integralkriteriet) att $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^x}$ är konvergent för alla $x > 1$. Eftersom en absolutkonvergent serie är konvergent följer det att serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ är konvergent i halvplanet $\{z : \mathrm{Re}(z) > 1\}$, och definierar därför en funktion $\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ där.

   Låt $a > 1$. På $\{z : Re(z) \geq a\}$ får vi att

$$|\sum_{1}^{N} \frac{1}{n^z} - \zeta(z)| = |\sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{n^z}| \leq \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{Re(z)}} \leq \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \longrightarrow 0$$

   då $N \to \infty$, dvs serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ konvergerar likformigt på $\{z : Re(z) \geq a\}$. Varje enskild term $1/n^z$ är kontinuerlig i z såenligt sats är $\zeta(z)$ kontinuerlig på $\{z : Re(z) \geq a\}$. Låt nu γ vara en styckvist glatt sluten kurva i $\{z : Re(z) > a\}$. Eftersom $\sum_1^N \frac{1}{n^z}$ konvergerar likformigt mot $\zeta(z)$ på$\{z : Re(z) \geq a\}$ kan vi enligt sats föra ut summationen från integralen:

$$\int_\gamma \zeta(z) dz = \sum_1^{\infty} \int_\gamma \frac{1}{n^z}.$$

   Varje enskild term $1/n^z$ är holomorf i hela $\mathbb{C}$. Dåγ är sluten är den automatiskt nollhomotop i $\mathbb{C}$, såfrån Cauchys sats följer det att

$$\int_\gamma \frac{1}{n^z} = 0.$$

   Som en konsekvens blir alltså

$$\int_\gamma \zeta(z) dz = \sum_1^{\infty} \int_\gamma \frac{1}{n^z} = 0.$$

   Eftersom ζ är kontinuerlig i området $\{z : Re(z) > a\}$ samt kurvintegralen kring varje styckvist glatt sluten kurva i $\{z : Re(z) > a\}$ blir noll säger Moreras sats att $\zeta(z)$ är holomorf i $\{z : Re(z) > a\}$. Eftersom att vara holomorf är en lokal egenskap och ζ är holo i alla $\{z : Re(z) > a\}$ för $a > 1$ följer att $\zeta(z)$ är holo i $\{z : \mathrm{Re}(z) > 1\}$.

Lycka till!
David