Tenta i MVE025/MVE295, Komplex (matematisk) analys, F2 och TM2/Kf2

2018 11 01, 8.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Jimmy Johansson, 031-7725325
Kursansvarig: David Witt Nyström, 031-7721068

Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39 (4), 40-50 (5)

---

1. Beräkna med hjälp av residykalkyl Fouriertransformen av
$$f(x) := \frac{1}{(x^2+1)(x^2+25)}.$$
(7p)

Lösning: a) Enligt definition har vi att
$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{(x^2+1)(x^2+25)} dx.$$
Vi sätter
$$g(z) := \frac{e^{-itz}}{(z^2+1)(z^2+25)}.$$
Vi vet då att
$$\hat{f}(t) = \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]} g(z)dz.$$

Vi antar först att $t \leq 0$. Låt $\gamma_R(s) := Re^{is}, s \in [0,\pi]$ samt $\sigma_R := [-R,R] \cup \gamma_R$ som då är en sluten kurva. Vi har att
$$\left|\int_{\gamma_R} gdz\right| \leq \max_{z\in\gamma_R} \left|\frac{e^{-itz}}{(z^2+1)(z^2+25)}\right| |\gamma_R| \leq \frac{\pi R}{(R^2-1)(R^2-25)} \longrightarrow 0$$
då $R \to \infty$. Här använde vi först triangelolikheten för integraler, sedan att $|e^{-itz}| = e^{ty} \leq 1$ på γ_R samt att $|(z^2+1)(z^2+25)| \geq (|z|^2-1)(|z|^2-25) = (R^2-1)(R^2-25)$ på γ_R tack vare den omvända triangelolikheten. Detta implicerar att
$$\hat{f}(t) = \lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_R} gdz.$$

Vi noterar nu att $g(z)$ är holomorf i $\mathbb{C}$ förutom isolerade singulariteter i $\pm i$ och $\pm 5i$, varav i och $5i$ ligger i det inre av σ_R för stora R. Enligt räkneregler för residyer har vi att
$$Res_i g = \left(\frac{e^{-itz}}{(z+i)(z^2+25)}\right)_{|z=i} = \frac{e^t}{48i},$$
samt
$$Res_{5i} g = \left(\frac{e^{-itz}}{(z^2+1)(z+5i)}\right)_{|z=5i} = -\frac{e^{5t}}{240i}.$$

Residysatsen säger nu att

$$\int_{\sigma_R} g dz = 2\pi i (Res_i g + Res_{5i} g) = \frac{\pi}{24}(e^t - \frac{1}{5}e^{5t}),$$

så sammantaget får vi att för $t \leq 0$ är

$$\hat{f}(t) = \frac{\pi}{24}(e^t - \frac{1}{5}e^{5t}).$$

Eftersom f är reellvärd gäller räkneregeln

$$\hat{f}(t) = \overline{\hat{f}(-t)}$$

så vi får att för $t \geq 0$ är

$$\hat{f}(t) = \frac{\pi}{24}(e^{-t} - \frac{1}{5}e^{-5t}).$$

Sammantaget får vi därför att

$$\hat{f}(t) = \frac{\pi}{24}(e^{-|t|} - \frac{1}{5}e^{-5|t|}).$$

2. Hitta med hjälp av Laplacetransformen en funktion $u : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ sådan att

$$u'''(t) + 4u'(t) = 1$$

med begynnelsevärden $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$ och $u''(0) = 0$. (7p)

Lösning:

Vi tar Laplacetransformen av ekvationen och får

$$s^3\tilde{u} - s^2 + 4(s\tilde{u} - 1) = \frac{1}{s}$$

vilket ger oss att

$$\tilde{u} = \frac{1}{s^2(s^2+4)} + \frac{1}{s}.$$

Partialbråksuppdeling ger

$$\frac{1}{s^2(s^2+4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4}\right).$$

Vi får alltså att

$$\tilde{u} = \frac{1}{4}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{s^2+4} + \frac{1}{s}..$$

Från tabell har vi

$$\frac{1}{s} = \tilde{1},$$

$$\frac{1}{s^2} = \tilde{t}$$

och

$$\frac{2}{s^2+4} = \widetilde{\sin 2t}$$

så vi får att

$$\tilde{u} = \mathcal{L}(1 + \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\sin 2t).$$

Enligt inversionsformlen får vi därför att

$$u = 1 + \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\sin 2t.$$

3. Bestäm bilden av området $A := \{z : |z - 3/2| > 1/2, |z - 2| < 1\}$ under avbildningen

$$f(z) := e^{\frac{1}{z-1}}.$$

(Tips: använd att $f(z) = e^z \circ M(z)$ där $M(z) = \frac{1}{z-1}$.) (7p)

Lösning: Vi hittar först $M(A)$. Vi noterar att $M(z)$ är en Möbiusavbildning, och att $M(1) = \infty, M(2) = 1, M(3) = 1/2$. Eftersom Mavb avbildar cirklar och linjer på cirklar eller linjer får vi att $M(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Och eftersom Mavb är konforma får vi att $M(C(3/2, 1/2))$ är en linje som skär den reella axeln i punkten 1 i rät vinkel, dvs $M(C(3/2, 1/2)) = \{z : \text{Re}(z) = 1\} \cup \{\infty\}$. På samma sätt får vi att $M(C(2, 1)) = \{z : \text{Re}(z) = 1/2\} \cup \{\infty\}$. Det följer att $M(A)$ är begränsat av dessa två linjer. Då $M(5/2) = 2/3$ får vi att $B := M(A) = \{z : 1/2 < \text{Re}(z) < 1\}$. Det återstår att bestämma bilden B under exponentialavbildningen. Men vi vet att $|e^z| = e^x$ och $arg(e^z) = y + 2\pi k$ så bilden av B blir precis $\{z : e^{1/2} < |z| < e\}$. Vi får tillslut att $f(A) = exp(M(A)) = \{z : e^{1/2} < |z| < e\}$.

4. Bestäm antalet nollställen till funktionen $z^5 - 5z + \sin z$ i annulusen $\{z : 1 < |z| < 2\}$. (7p)

Lösning: Vi använder Rouchés sats, först på $D(0, 2)$ och sen på $D(0, 1)$.

Låt $f(z) := z^5$ och $g(z) := -5z + \sin z$. Vi har att

$$|f(z)| = |z|^5 = 32$$

på $C(0, 2)$. Notera att

$$|\sin z| = |\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}| \leq \frac{1}{2}(e^{-y} + e^y) \leq e^{|y|} \leq e^2$$

på$C(0, 2)$. Vi har därför att

$$|g(z)| = |-5z + \sin z| \leq 5|z| + |\sin z| \leq 10 + e^2 < 19$$

på $C(0, 2)$. Vi har alltså att $|f| > |g|$ på $C(0, 2)$. Det följer nu från Rouchés sats att $f + g$ har lika många nollställen som f i $D(0, 2)$, dvs 5 st.

Låt nu istället $f(z) := -5z$ och $g(z) := z^5 + \sin z$. Vi har att

$$|f(z)| = |-5z| = 5|z| = 5$$

på $C(0, 1)$. Notera att

$$|\sin z| = |\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}| \leq \frac{1}{2}(e^{-y} + e^y) \leq e^{|y|} \leq e$$

på$C(0,1)$. Vi har därför att

$$|g(z)| = |z^5 + \sin z| \leq |z|^5 + |\sin z| \leq 1 + e < 4$$

på $C(0,1)$. Vi har alltså att $|f| > |g|$ på $C(0,1)$. Det följer nu från Rouchés sats att $f + g$ har lika många nollställen som f i $D(0,2)$, dvs 1 st.

Det följer att $z^5 - 5z + \sin z$ har $5 - 1 = 4$ nollställen i $D(0,2) \setminus D(0,1)$. Och eftersom enligt omvända triangelolikheten $|f+g| \geq |f| - |g| > 0$ på $C(0,1)$ har $z^5 - 5z + \sin z$ inga nollställen på $C(0,1)$, så $z^5 - 5z + \sin z$ måste ha 4 nollställen i $\{z : 1 < |z| < 2\}$.

5. Beräkna
$$\int_{|z|=5} \frac{z}{(z+\pi)\sin z} dz.$$
(7p)

Lösning: Låt $f(z) := \frac{z}{(z+\pi)\sin z}$. Vi noterar att f är holomorf i $\mathbb{C}$ förutom i punkterna $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Av dessa ligger 0 och $\pm\pi$ i det inre av $C(0,5)$. $\sin z$ har enkla nollställen i $k\pi$, och eftersom z har ett nollställe i 0 följer det från Klassifikation av isolerade sing. att 0 är en hävbar singularitet. Enligt sats är därför $Res_0 f = 0$. Vi har också enligt räkneregel för residyer att

$$Res_\pi f = \left(\frac{z}{(z+\pi)\cos z}\right)_{|z=\pi} = -1/2.$$

I $-\pi$ har f en pol av ordning 2, så för att hitta residyn tittar vi på början av f:s Laurentserieutveckling centrerad i $-\pi$, giltig i $A(-\pi,\pi)$. Vi noterar att $\sin z = -\sin(z+\pi)$, så

$$\sin z = -(z+\pi) + \frac{(z+\pi)^3}{6} + O((z+\pi)^5) = -(z+\pi)(1 - \frac{(z+\pi)^2}{6} + O((z+\pi)^4)).$$

Det följer att början på LSU av $1/\sin z$ blir

$$\frac{1}{\sin z} = -\frac{1}{(z+\pi)(1 - \frac{(z+\pi)^2}{6} + O((z+\pi)^4))} = -\frac{1}{(z+\pi)} \sum_0^\infty (\frac{(z+\pi)^2}{6} + O((z+\pi)^4)))^k =$$
$$= -\frac{1}{(z+\pi)}(1 + \frac{(z+\pi)^2}{6} + O((z+\pi)^4))).$$

Vi skriver också $z = -\pi + (z+\pi)$ och får

$$\frac{z}{(z+\pi)\sin z} = -(-\pi + (z+\pi))\frac{1}{(z+\pi)^2}(1 + \frac{(z+\pi)^2}{6} + O((z+\pi)^4))) =$$
$$= \frac{\pi}{(z+\pi)^2} - \frac{1}{z+\pi} + \frac{\pi}{6} + O(z+\pi),$$

vilket ger oss att $Res_{-\pi} f = -1$.

Enligt Residysatsen har vi att

$$\int_{|z|=5} f dz = 2\pi i (Res_0 f + Res_\pi f + Res_{-\pi} f) = -3\pi i.$$

6. Visa att om $f(z)$ har kontinuerliga partiella derivator som uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer i ett område G, då är f holomorf i G. (5p)

   Lösning: Se bok eller föreläsningsanteckningar.

7. Formulera och bevisa Cauchys sats. (5p)

   Lösning: Se bok eller föreläsningsanteckningar.

8. Antag att f är holomorf i $\{z : 0 < |z| < 1\}$ samt att $|f(z) - 1| \geq 1$. Visa att singulariteten i 0 inte kan vara väsentlig. (5p)

   Lösning: Att $|f(z) - 1| \geq 1$ betyder speciellt att $f(z) \neq 1$, sådet följer att att $g(z) := \frac{1}{f(z)-1}$ är holomorf i $A(0,0,1)$. g har alltså också en isolerad singularitet i 0. Vi har nu att

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - 1|} \leq 1.$$

   Det följer då från räkneregler för gränsvärden att

$$\lim_{z \to 0} zg(z) = 0.$$

   Enligt Klassifikation av isolerade singulariteter har därför g en hävbar singularitet i 0, dvs g kan utvidgas till en holomorf funktion i $D(0,1)$. Vi noterar också att då $g(z) = \frac{1}{f(z)-1}$ att $g \neq 0$ i $A(0,0,1)$. Vi kan därför skriva $1/g(z) = f(z) - 1$, dvs $f(z) = 1/g(z) + 1$. Om $g(0) \neq 0$ betyder det att $1/g(z)$ är holomorf i en omgivning till 0, och vi ser att i detta fall har f en hävbar singularitet i 0. Om $g(0) = 0$ så gäller att $\lim_{z\to 0} g(z) = 0$ (g är holo och därför kontinuerlig), så enligt räkneregler för gränsvärden har vi att

$$\lim_{z \to 0} |f(z)| = \frac{\lim_{z\to 0} |1 + g(z)|}{\lim_{z\to 0} |g(z)|} = 1/0 = \infty.$$

   Detta betyder alltså att f har en pol i 0, dvs i ingetdera fall är singulariteten väsentlig.

Lycka till!
David