Tenta i MVE025/MVE295, Komplex (matematisk) analys, F2 och TM2/Kf2

2019 01 09, 8.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Jimmy Aronnsson, 031-7725325
Kursansvarig: David Witt Nyström, 031-7721068

Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39 (4), 40-50 (5)

---

1. Skriv real- och imaginärdel av funktionen
$$f(z) := \frac{e^z}{z}$$
som funktioner av x och y ($z = x+iy$), och använd sedan satsen om Cauchy-Riemanns ekvationer för att visa att $f(z)$ är holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. (7p)

2. (a) Beräkna med hjälp av residykalkyl Fouriertransformen av
$$f(x) := \frac{1}{(x^2+2)(x^2+4)^2}.$$
(5p)

   (b) Använd resultatet i (a) för att bestämma integralen
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3x}{(x^2+2)(x^2+4)^2} dx.$$
(2p)

3. Hitta antalet nollställen till polynomet $2z^4 - 4z - 1$ i området $\{z : Re(z) > 0, |z-3| > 1\}$. (7p)

4. Bestäm bilden av området $\{z : Re(z) > 0, |z| < 1\}$ under avbildningen
$$f(z) := \frac{\mathrm{Log}(z) - i\pi/2}{\mathrm{Log}(z) + i\pi/2}.$$
(Tips: använd att $f(z) = M(z) \circ \mathrm{Log}(z)$ där $M(z) = \frac{z - i\pi/2}{z + i\pi/2}$.) (7p)

5. Antag att Laurentserien
$$f(z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-2)^k$$
konvergerar i annulusen $\{z : 0 < |z-2| < 2\}$. Bestäm de två integralerna

   (a)
$$\int_{|z-2|=1} f(z) \mathrm{Log}(z) dz,$$
(5p)

   (b)
$$\int_{|z-1|=1/2} f(z) \mathrm{Log}(z) dz.$$
(2p)

6. Formulera och bevisa triangelolikheten för kurvintegraler av komplexa funktioner. (5p)

7. Formulera och bevisa satsen om Taylorutveckling av holomorfa funktioner. (5p)

8. Visa att den harmoniska funktionen $\ln(\sqrt{x^2+y^2})$ inte har något harmoniskt konjugat i området $\{z : 1 < |z| < 2\}$. (5p)

Lycka till!
David