Tenta i MVE025/MVE295, Komplex (matematisk) analys, F2 och TM2/Kf2

2019 01 09, 8.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Jimmy Aronnsson, 031-7725325
Kursansvarig: David Witt Nyström, 031-7721068

Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39 (4), 40-50 (5)

---

1. Skriv real- och imaginärdel av funktionen

$$f(z) := \frac{e^z}{z}$$

som funktioner av x och y ($z = x+iy$), och använd sedan satsen om Cauchy-Riemanns ekvationer för att visa att $f(z)$ är holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. (7p)

Lösning: Standardräkning ger att $u(x,y) := \mathrm{Re}(f(z))$ blir

$$u(x,y) = \frac{e^x(x\cos y + y\cos y)}{x^2+y^2}$$

medan $v(x,y) := \mathrm{Im}(f(z))$ ges av

$$v(x,y) = \frac{e^x(x\sin y - y\cos y)}{x^2+y^2}.$$

Vi får vidare att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e^x}{(x^2+y^2)^2}(\cos y(x^3+xy^2-x^2+y^2)+\sin y(y^3+yx^2-2yx)) = \frac{\partial v}{\partial y},$$

och på liknande sätt ses att

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

dvs Cauchy-Riemanns ekvationer är uppfyllda. Då dessutom man enkelt ser att f är C^1 följer enligt satsen om Cauchy-Riemanns ekvationer att f är i holomorf i dess definitionsområde $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

2. (a) Beräkna med hjälp av residykalkyl Fouriertransformen av

$$f(x) := \frac{1}{(x^2+2)(x^2+4)^2}.$$

(5p)

(b) Använd resultatet i (a) för att bestämma integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3x}{(x^2+2)(x^2+4)^2} dx.$$

(2p)

Lösning: a) Enligt definition har vi att

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{(x^2+2)(x^2+4)^2} dx.$$

Vi sätter

$$g(z) := \frac{e^{-itz}}{(z^2+2)(z^2+4)^2}.$$

Vi vet då att

$$\hat{f}(t) = \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]} g(z)dz.$$

Vi antar först att $t \leq 0$. Låt $\gamma_R(s) := Re^{is}$, $s \in [0, \pi]$ samt $\sigma_R := [-R, R] \cup \gamma_R$ som då är en sluten kurva. Vi har att

$$\left| \int_{\gamma_R} g dz \right| \leq \max_{z\in\gamma_R} \left| \frac{e^{-itz}}{(z^2+2)(z^2+4)^2} \right| |\gamma_R| \leq \frac{\pi R}{(R^2-2)(R^2-4)^2} \longrightarrow 0$$

då $R \to \infty$. Här använde vi först triangelolikheten för integraler, sedan att $|e^{-itz}| = e^{ty} \leq 1$ på γ_R samt att $|(z^2+2)(z^2+4)^2| \geq (|z|^2-2)(|z|^2-4)^2 = (R^2-2)(R^2-4)^2$ på γ_R tack vare den omvända triangelolikheten. Detta implicerar att

$$\hat{f}(t) = \lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_R} g dz.$$

Vi noterar nu att $g(z)$ är holomorf i $\mathbb{C}$ förutom isolerade singulariteter i $\pm\sqrt{2}i$ och $\pm 2i$, varav $\sqrt{2}i$ och $2i$ ligger i det inre av σ_R för stora R. Enligt räkneregler för residyer har vi att

$$Res_{\sqrt{2}i} g = \left(\frac{e^{-itz}}{(z+\sqrt{2}i)(z^2+4)^2} \right)_{|z=\sqrt{2}i} = \frac{e^{\sqrt{2}t}}{8\sqrt{2}i},$$

samt

$$Res_{2i} g = \left(\frac{e^{-itz}}{(z^2+2)(z+2i)^2} \right)'_{|z=2i} = ... = ie^{2t}\left(\frac{3}{64} - \frac{t}{32}\right).$$

Residysatsen säger nu att

$$\int_{\sigma_R} g dz = 2\pi i(Res_{\sqrt{2}i} g + Res_{2i} g) = \frac{\pi e^{\sqrt{2}t}}{4\sqrt{2}} + \frac{\pi e^{2t}}{16}\left(t - \frac{3}{2}\right),$$

så sammantaget får vi att för $t \leq 0$ är

$$\hat{f}(t) = \frac{\pi e^{\sqrt{2}t}}{4\sqrt{2}} + \frac{\pi e^{2t}}{16}(t - \frac{3}{2}).$$

Eftersom f är reellvärd gäller räkneregeln

$$\hat{f}(t) = \overline{\hat{f}(-t)}$$

så vi får att för $t \geq 0$ är

$$\hat{f}(t) = \frac{\pi e^{-\sqrt{2}t}}{4\sqrt{2}} + \frac{\pi e^{-2t}}{16}(-t - \frac{3}{2}).$$

Sammantaget får vi därför att

$$\hat{f}(t) = \frac{\pi e^{-\sqrt{2}|t|}}{4\sqrt{2}} + \frac{\pi e^{-2|t|}}{16}(-|t| - \frac{3}{2}).$$

Lösning: b) Eftersom funktionen är udda ser man direkt att integralen blir 0.

3. Hitta antalet nollställen till polynomet $2z^4 - 4z - 1$ i området $\{z : Re(z) > 0, |z-3| > 1\}$. (7p)

   Lösning: Vi använder först argumentprincipen för att hitta antalet nollställen i högra halvplanet. Låt $\gamma_R(t) := Re^{it}, t \in [-\pi/2, \pi/2]$ och $\sigma_R := [iR, -iR] \cup \gamma_R$. Vi ser att

$$p(Re^{it}) = R^4 \left(2e^{4it} - \frac{4e^{it}}{R^3} - \frac{1}{R^4}\right)$$

   så $arg(p(Re^{it})) \approx 4t + 2\pi k$ för stora R vilket implicerar att $argvar(f(\gamma_R)) \approx 4\pi$ för stora R. Vi har också att

$$p(iy) = 2y^4 - 4iy - 1.$$

   Speciellt får vi att $arg(p(iR)) \approx 0 + 2\pi k_1$ och vi ser också att $p(iR)$ ligger i nedre halvplanet för stora R. Vidare ser vi att $arg(p(-iR)) \approx 0 + 2\pi k_2$ och vi ser också att $p(-iR)$ ligger i övre halvplanet för stora R. Då $\mathrm{Im}(p(iy)) = 0$ omm $y = 0$ ser vi att kurvan $p([iR, -iR])$ endast passerar x-axeln i punkten -1. Detta betyder att kurvan $p([R, -R])$ måste gå i princip ett helt varv runt 0 i negativ riktning (ses bäst i figur), dvs $argvar(p([R, -R])) \approx -2\pi$. Vi får att

$$W(p(\sigma_R)) = \frac{1}{2\pi} argvar(p(\sigma_R)) = \frac{1}{2\pi}(argvar(p(\gamma_R) + argvar(p([iR, -iR])))) \approx 1$$

   för stora R. Men vindningstal är heltal så vi får att för stora R är

$$W(p(\sigma_R)) = 1.$$

Argumentprincipen säger då att p har ett nollställe i $int(\sigma_R)$ för stora R, dvs p har ett nollställe i det öppna hÃűgra halvplanet.

Nu använder vi Rouchés sats för att hitta antalet nollställen i $D(3,1)$. Skriv $p = f + g$ där $f(z) := 2z^4$ och $g(z) := -4z - 1$. På randen till $D(3,1)$ gäller

$$2 \leq |z| \leq 4.$$

Vi har då att $|f| \geq 32$ på $C(3,1)$ medan mha triangelolikheten $|g| \leq |-4z| + |-1| \leq 17 < 32$ på $C(3,1)$. Alltså har vi $|f| > |g|$ på $C(3,1)$ så enligt Rouchés sats har därför p lika många nollställen som f i $D(3,1)$, dvs 0 st. Det kan då inte heller finnas några på randen, så tillslut får vi att $p(z)$ har ett nollställe i $\{z : \text{Re}(z) > 1, |z-3| > 1\}$.

4. Bestäm bilden av området $\{z : Re(z) > 0, |z| < 1\}$ under avbildningen

$$f(z) := \frac{\text{Log}(z) - i\pi/2}{\text{Log}(z) + i\pi/2}.$$

(Tips: använd att $f(z) = M(z) \circ \text{Log}(z)$ där $M(z) = \frac{z - i\pi/2}{z + i\pi/2}$.) (7p)

Lösning: Låt $A := \{z : Re(z) > 1, |z| < 1\}$. Vi ser att $B := Log(A) = \{z : Re(z) < 1, -\pi/2 < Im(z)\pi/2\}$. Vi har nu att $f(A) = M(B)$. Vi noterar att $M(z)$ är en Möbiusavbildning, och att $M(-i\pi/2) = \infty, M(i\pi/2) = 0, M(0) = -1, M(\infty) = 1$. Eftersom Mavb avbildar cirklar och linjer på cirklar eller linjer får vi att $M(i\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Vi får också att M avbildar linjen $Im(z) = \pi/2$ på en cirkel som går genom punkterna 0 och 1. Dessutom måste den av konformitet skära den reella axeln i rät vinkel, så det blir $C(1/2, 1/2)$. På liknande sätt får vi att M avbildar linjen $Im(z) = -\pi/2$ på den imaginära axeln. Vi har alltså att $M(B)$ avgränsas av dessa tre kurvor. Vi tar nu en punkt i B, t ex $-\pi/2$, och ser att $M(-\pi/2) = -i$. Detta ger oss att $M(B) = \{z : Re(z) < 1, Im(z) < 0, |z - 1/2| > 1/2\}$, och alltså $f(A) = \{z : Re(z) < 1, Im(z) < 0, |z - 1/2| > 1/2\}$.

5. Antag att Laurentserien

$$f(z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-2)^k$$

konvergerar i annulusen $\{z : 0 < |z-2| < 2\}$. Bestäm de två integralerna

(a)

$$\int_{|z-2|=1} f(z)\text{Log}(z)dz,$$

(5p)

(b)

$$\int_{|z-1|=1/2} f(z)\mathrm{Log}(z)dz.$$

(2p)

Lösning: a) Enligt sats konvergerar Laurentserien likformigt på cirkeln $|z-2|=1$ så det följer att

$$\int_{|z-2|=1} f(z)Log(z)dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{|z-2|=1} Log(z)(z-2)^k dz.$$

Då $k \geq 0$ har vi att $Log(z)(z-2)^k$ är holomorf i $D(2,2)$, såintegralen blir noll tack vare Cauchys sats. För negativa k kan integralen räknas ut t ex mha Cauchys integralformel för derivator. Vi har

$$\int_{|z-2|=1} \frac{Log(z)}{z-2}dz = 2\pi i Log(2) = 2\ln 2\pi i,$$

medan för $m \geq 2$ gäller att

$$\int_{|z-2|=1} \frac{Log(z)}{(z-2)^m}dz = \frac{2\pi i}{(m-1)!}(Log(z))^{(m-1)}_{|z=2} = \frac{2\pi i}{(m-1)!}(\frac{1}{z})^{(m-2)}_{|z=2} = ... = \frac{\pi i(-1)^m}{(m-1)2^{m-2}}.$$

Summerar vi ihop detta får vi att

$$\int_{|z-2|=1} f(z)Log(z)dz = \pi i \left(2\ln 2 + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m a_{-m}}{(m-1)2^{m-2}} \right).$$

Lösning: b) Vi noterar att $f(z)Log(z)$ är holomorf i $D(1,1)$ och att kurvan $C(1,1/2)$ är nollhomotop i $D(1,1)$, så enligt Cauchys sats är

$$\int_{|z-1|=1/2} f(z)Log(z)dz = 0.$$

6. Formulera och bevisa triangelolikheten för kurvintegraler av komplexa funktioner. (5p)

   Lösning: Se bok eller föreläsningsanteckningar.

7. Formulera och bevisa satsen om Taylorutveckling av holomorfa funktioner. (5p)

   Lösning: Se bok eller föreläsningsanteckningar.

8. Visa att den harmoniska funktionen $\ln(\sqrt{x^2+y^2})$ inte har något harmoniskt konjugat i området $\{z : 1 < |z| < 2\}$. (5p)

Lösning: Uppgiften är liktydig med att visa att det inte finns någon holomorf funktion f i $A(0,1,2)$ sådan att $Re(f) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$ ($Im(f)$ skulle i så fall vara ett harmoniskt konjugat). För att få en motsägelse antar vi att det finns en sådan funktion f. Vi noterar att $\ln(\sqrt{x^2+y^2}) = \ln|z|$ är realdelen av funktionen $Log(z)$, som är holomorf området $U := A(0,1,2) \setminus [-2,-1]$. U är sammanhängande, så från Cauchy-Riemanns ekvationer följer det att $f(z) - Log(z)$ är konstant på U. Men $Log(z)$ är diskontinuerlig längs linjen $[-2,-1]$ vilket innebär att $f(z)$ också måste vara diskontinuerlig där. Men f antogs ju vara holomorf i hela $A(0,1,2)$, dvs speciellt kontinuerlig i hela $A(0,1,2)$, vilket alltså är en motsägelse. Det innebär att det inte kan finnas en sådan holomorf funktion, dvs med andra ord kan $\ln(\sqrt{x^2+y^2})$ ej ha något harmoniskt konjugat i $A(0,1,2)$.

Lycka till!
David