Kapitel 1

1: (a) $7 - i$
(b) $3 + 3i$
(c) $-11 - 2i$
(d) 5
(e) $-2 + 3i$
2: (a) $\mathrm{Re}((z-a)/(z+a)) = (|z|^2 - a^2)/(|z|^2 + a^2 + 2a\mathrm{Re}(z))$,
$\mathrm{Im}((z-a)/(z+a)) = (2a\mathrm{Im}(z))/(|z|^2 + a^2 + 2a\mathrm{Re}(z))$
(b) $19/25 - (8/25)i$
(c) 1
(d) 1 om $n = 4k, k \in \mathbb{Z}$, i om $n = 4k+1, k \in \mathbb{Z}$, -1 om $n = 4k+2, k \in \mathbb{Z}$, -i om $n = 4k+3, k \in \mathbb{Z}$
3: (a) $\sqrt{5}, -2 - i$
(b) $5\sqrt{5}, 5 - 10i$
(c) $\sqrt{(10/11)}, (3/11)(\sqrt{2} - 1) + (i/11)(\sqrt{2} + 9)$
(d) $8, 8i$
4: (a) $2e^{i\pi/2}$
(b) $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$
(c) $2\sqrt{3}e^{i5\pi/6}$
(d) $e^{i3\pi/2}$
(f) 5
(g) $\sqrt{6}e^{-i\arctan(1/\sqrt{5})}$
(h) $(4/9)e^{i\pi}$
5: (a) $-1 - i$
(b) $34i$
(c) -1
(d) 2
6: (a) $\cos(\ln(2)) + i\sin(ln(2)) = e^{i\ln(2)}$
(b) $5i = 5e^{i\pi/2}$
(c) $ei = e \cdot e^{i\pi/2}$
(d) $e^{\phi}\sqrt{2}\cos(\pi/4 + \phi) + ie^{\phi}\sqrt{2}\sin(\pi/4 + \phi) = e^{\phi}\sqrt{2}e^{i(\pi/4+\phi)}$
8: (a) $z = \pm 5i$
(b) $z = (1/2)(-1 \pm 3i)$
(c) $(1/5)(-2 \pm i)$
(d) $z = (1/2)(1 \pm \sqrt{3})$
(e) $z = 0, 2$
9: $z = e^{i\pi/4} - 1$ och $z = e^{i5\pi/5} - 1$
11: (a) $z = e^{ik\pi/3}, k = 0, 1, ..., 5$
(b) $z = 2e^{i(2k+1)\pi/4}, k = 0, 1, 2, 3$
(c) $\sqrt[3]{3}e^{i(2k+1)\pi/6}, k = 0, 1, ..., 5$
(d) $z = e^{i2\pi k/3}, k = 0, 1, 2$ och $z = \sqrt[3]{2}e^{i2k\pi/3}, k = 0, 1, 2$
23: (b) en sluten cirkelskiva med centrum i $1 - i$ och radie 2
(d) en ellips som går genom punkterna $\pm\sqrt{5}/2, \pm 3i/2$
(f) en cirkel med centrum i $-5/3$ och radie $4/3$
(g) en hyperbola som går genom punkterna $-1, 1$
27: (a) öppen, begränsad och sammanhängande
(b) öppen, inte begränsad, sammanhängande

(c) öppen, begränsad och sammanhängande
(d) sluten, begränsad och sammanhängande
(e) öppen, begränsad och sammanhängande
29: (b) $\{z : |z| < 1\}$
(c) $\{z : |z| = 1\} \cup [-2, -1) \cup \{2\}$
(d) $\{2\}$

Kapitel 2

14: $T'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$, ingenstans noll.
17: (a) komplex deriverbar och holomorf i $\mathbb{C}$ med komplex derivata $-e^x e^{-iy}$
(b) ingenstans komplext deriverbar eller holomorf
(c) komplext deriverbar på linjen $\{x + iy \in \mathbb{C} : x = y\}$ med komplex derivata $2x$, ingenstans holomorf
(d) ingenstans komplext deriverbar eller holomorf
(e) komplext deriverbar och holomorf i $\mathbb{C}$ med derivata $-\sin(x)\cosh(y) - i\cos(x)\sinh(y)$
(f) ingenstans komplext deriverbar eller holomorf
(g) komplext deriverbar i nollan med derivata 0, ingenstans holomorf
(h) komplext deriverbar i nollan med derivata 0, ingenstans holomorf
(i) komplext deriverbar i punkten $\{i\}$ med derivata i, ingenstans holomorf
(j) komplex deriverbar och holomorf i $\mathbb{C}$ med derivata $2y - 2xi$
(k) komplext deriverbar i nollan med derivata 0, ingenstans holomorf
(l) komplext deriverbar i nollan med derivata 0, ingenstans holomorf
24: (a) $v = 2xy$
(b) $v = \cos(x)\sinh(y)$
(c) $v = 4xy + y$
(d) $v = -y/(x^2 + y^2)$
25: nej, men $x/(x^2 + y^2)$ är harmonisk i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, nej, $x^2/(x^2 + y^2)$ är inte harmonisk

Kapitel 3

14: (a) $(-z + 1)/(z - 3)$
(b) $((1 + i)z - (1 + i))/(z - 2)$
(c) $(z + i)/(iz + 1)$
15: En möjlig lösning är $(iz - i)/(z - 1 - i)$
16: $(2z + 1)/z + 2$
17: (a) det nedre halvplanet
(b) $\{w : \text{Im}(w) < 0, |w| < 1\}$
(c) $\{w : \text{Re}(w) < 1, |w - 1/2| > 1/2\}$
20: $(-1 \pm \sqrt{3})/2$
21: (a) $1/(1 - z)$
(b) $((1 + 2i)z - 1)/(z - 1 + 2i)$
(c) $((1 + i)/\sqrt{2})z$
33: (a) $\{w : |w| = 1\}$
(b) $\{w : |w| = e\}$
(c) $\{w : 1 \leq |w| \leq e\}$

39: $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty))$
41: (a) -1
(b) e^{π}
(c) $e^{-\pi/2}$
(d) $\cos((e^{-1} - e)/2) - i \sin((e^{-1} - e)/2)$
(e) $3 + 4i$
(f) $\sqrt[4]{2} \cos(\pi/8) + i \sqrt[4]{2} \sin(\pi/8)$
(g) $\sqrt{3}(1 - i)$
(h) -1
45: (a) $z = i$ (b) Ingen lösning

Kapitel 4

1: (a) 6
(c) 4
5: (a) $8\pi i$
(c) 0
6: (b) $\pi i, -\pi, 0, 2\pi i$
8: (c) $e^{z_0} - 1$
(e) $(17 + \ln(40/17))/2 + i(\arctan(1/3) + \arctan(1/4) - \pi)$
26: 0 för $r < |a|$, $2\pi i$ för $r > |a|$
29: $2\pi/\sqrt{3}$
33: 0 fÃűr $0 < r < 1$, $-\pi$ för $1 < r < 3$, 0 för $r > 3$
34: 0 för $r = 1$, $-\pi i/3$ för $r = 3$, 0 för $r = 5$
36: (a) $2\pi i$
(b) 0
(c) $-2\pi i/3$
(d) $2\pi i/3(e^3 - 1)$

Kapitel 5

1: (a) $2\pi i$
(b) $-2\pi i$
(c) $4\pi i$
(d) 0
3: (a) 0
(b) $2\pi i$
(c) 0
(d) πi
(e) 0
(f) 0
(g) $2\pi i(\sqrt{2} \sinh(1/\sqrt{2}) - \cosh(1/\sqrt{2}))$
(h) $-2\pi i/17$ 4: $2\pi i e^{w}$ om $|w| < 3$, 0 om $|w| > 3$
9: Vilken som helst enkelt sammmanhängande mängd som ej innehåler origo, t ex $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$
18: $\pi/\sqrt{2}$

Kapitel 6

4: (b) $-ie^z$
8: nej

Kapitel 7

25: (a) $\sum_{k=0}^{\infty}(-4)^k z^k$
(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3\times 6^k} z^k$
(c) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{4^k} z^k$
26: (a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$
(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{4k}$
(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} z^{2k+1}$
(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1}}{(2k)!} z^{2k}$
28: (a) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k (z-1)^k$, konvergensradie 1
(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (z-1)^k$, konvergensradie 1
33: (b) 1
(c) 1
(e) ∞
(g) $1/4$
34: (a) e^{z^2}
(c) $\frac{2z^2}{(1-z)^3}$

Kapitel 8

1: (b) konvergerar absolut på $A := \{z \in \mathbb{C} : |z-3| > 1\}$, konvergerar likformigt på kompakta delmängder $K \subseteq A$, t ex $\{z \in \mathbb{C} : r \leq |z-3| \leq R\}$ där $1 < r \leq R$
3: $\sum_0^{\infty}((-1)^{k+1}/(2k+1)!)(z-\pi)^{2k+1}$
5: (a) $1/2 - 1/2(z-1) + 1/4(z-1)^2 + O((z-1)^3)$
(b) $1/2 - (1/4)z + O(z^3)$
(c) $1 + (1/2)z - (1/8)z^2 + O(z^3)$
(d) $e^{-1}(1 + 2i(z-i) - (z-i)^2) + O((z-i)^3)$
17: En Laurentserie ges av av $\sum_{k\geq 0}(-2)^k (z-1)^{-k-2}$, konvergent i $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 2\}$
19: Laurentserien ges av $-3/(z+1) + 1$ vilken konvergerar i $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$
20: $c_{-4} = 0, c_{-3} = 0, c_{-2} = 1, c_{-1} = 0, c_0 = 1/3, c_1 = 0, c_2 = 1/15, c_3 = 0, c_4 = 2/189$
21: $z + z^3/3 + 2z^5/15 + 17z^7/315 + O(z^9)$, konvergensradien är $\pi/2$
22: (a) $\sum_0^{\infty} a^k z^k/k!$
(c) $\sum_0^{\infty} 2^{k/2}\cos(k\pi/4) z^k/k!$
25: (a) $\sum_{-1}^{\infty}(-1)^{k+1} z^{2k}/(2(k+1)!)$
26: $1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{5}{24}z^4 + \ldots$
28: (a) 1
(b) 3

(c) 4
29: (a) $\pm i$, multiplicitet 4
(b) $k\pi, k \in \mathbb{Z}$, multiplicitet 2
(c) $(2k+1)i\pi, k \in \mathbb{Z}$, multiplicitet 1
(d) 0, multiplicitet 3, och $\pi/2 + k\pi$, multiplicitet 1
32: i $A(0,1,1)$: $c_k = 1 + (-1)^k/2^{k+1}$ för $k \geq 0$, $c_k = 0$ för $k < 0$
i $A(0,1,2)$: $c_k = (-1)^k/2^{k+1}$ för $k \geq 0$, $c_k = -1$ för $k < 0$
i $A(0,2,\infty)$ $c_k = 0$ för $k \geq 0$, $c_k = -1 - (-1)^k/2^{k+1}$ för $k < 0$
38: svaret beror på kurvan

Kapitel 9

2: (a) $1, i, -i$ av ordning $4, 3, 3$
(b) $k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, ordning 1, (0 är hävbar sing.)
(c) 0, ordning 4
(d) $2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, ordning 1
(e) $2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, ordning 1
5: (a) $2\pi i$
(b) $27\pi i/4$
(c) $-2\pi i/17$
(d) $\pi i/3$
(e) $2\pi i$
(f) 0
7: (d) $-e$
8: (d) $\pi i/3$
15: $\pi/2$
17: $\pi e^{-1/\sqrt{2}} \sin(1/\sqrt{2})/4$
18: $(f(a) - f(b))/(a - b)$
21: (a) 0
(b) 1
(c) 3

Residy

sid 8 nr 2: $2\pi/3$