1. LÖSNINGAR MVE025/MVE295, 2015-01-02

1. a.Om $T(-1) = 0$ och $T(3) = \infty$ så måste Möbiusavbildningen T ha formen

$$T(z) = k\frac{1+z}{3-z}.$$

Om dessutom $T(1) = i$ får vi

$$k\frac{2}{2} = i$$

så $k = i$.

b. Vi får

$$\int_{|z|=4} T^2(z)dz = -\int_{|z|=4} \frac{(1+z)^2}{(3-z)^2}dz$$

Enligt Cauchy's integralformel (för derivatan) är detta lika med $-2\pi i f'(3)$ om $f(z) = (1+z)^2$, dvs $-16\pi i$.

2. Vi har $p(z) = z^3 - 3z + 1$ och vi vill studera det polynomet i $\{|z-1| < 1\}$. Om vi sätter $w = z - 1$, dvs $z = w + 1$ får vi att $p(z) = p(w+1) = (1+w)^3 - 3(w+1) + 1 = w^3 + 3w^2 - 1 = q(w)$. Problemet är alltså att bestämma antalet nollställen till $q(w)$ där $|w| < 1$. Vi skriver $q(w) = f(w) + g(w)$, där $f(w) = 3w^2$ och $g(w) = w^3 - 1$. När $|w| = 1$ är $|f(w)| = 3$ medan $|g(w)| = |w^3 - 1| \leq |w^3| + 1 = 2 < 3$ Rouchés sats ger därför att q har lika många nollställen i $\{|w| < 1\}$ som f, dvs 2 stycken.

3. Eftersom utvecklingen är i potenser av z utvecklar vi först

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z+3)} = \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3}.$$

När $|z| > 2$ gäller

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1/z}{1+2/z} = \sum_0^\infty \frac{(-2)^k}{z^{k+1}}$$

och när $|z| < 3$ gäller

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1/3}{1+z/3} = \sum_0^\infty \frac{(-z)^k}{3^{k+1}}.$$

Därför blir

$$\frac{1}{z(z+2)(z+3)} = (1/z)\left(\sum_0^\infty \frac{(-2)^k}{z^{k+1}} + \sum_0^\infty \frac{z^k}{(-3)^{k+1}}\right).$$

4 a. Vi kan anta att $a, b > 0$. Antag också först att $a \neq b$. Då kan vi skriva att

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \left(\frac{1}{x^2 + a^2} - \frac{1}{x^2 + b^2} \right) /(b^2 - a^2).$$

Vi räknar därför först ut Fouriertransformen av

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}.$$

Kalkylen följer nära exempl 3 i kompendite om Fourieranalys så vi ger bara en kort skiss. F-tranformen är

$$\hat{g}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{x^2 + a^2} dx.$$

Antag först att $t \leq 0$. Då kan vi betrakta integralen av funktionen över en stor halvcirkel i *övre* halvplanet, vilken enligt residysatsen är lika med

$$2\pi i Res_{ia}(\frac{e^{-itz}}{z^2 + a^2} = 2\pi i e^{ta}/(2ia) = \frac{\pi}{a} e^{ta} = \frac{\pi}{a} e^{-|t|a}$$

eftersom t är negativt. För $t > 0$ använder vi att formeln för $\hat{f}$ medför att

$$\overline{\hat{g}(t)} = \hat{g}(-t) = \frac{\pi}{a} e^{-|t|a},$$

så

$$\hat{g}(t) = \frac{\pi}{a} e^{-|t|a}$$

för alla t. Det följer att

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{b^2 - a^2} \left(\frac{\pi}{a} e^{-|t|a} - \frac{\pi}{b} e^{-|t|b} \right)$$

om $a \neq b$. För att få transformen när $a = b$ kan vi ta gränsvärdet av detta uttryck då $a \to b$, vilket är (eftersom $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$)

$$(-1)/(2b)(d/da|_{a=b}) \frac{\pi}{a} e^{-|t|a} = \frac{\pi}{2b^3} e^{-b|t|}(1 + b|t|).$$

(Alternativt kan man använda residykalkyl direkt och formeln för residyn av en dubbelpol.)

5. a. **Obs: Här finns ett mindre fel i formuleringen. Begynnelsevärdet $u(0) = 0$ behövs inte!**

Observera att

$$\int_0^t u(s) ds = u * 1.$$

Laplacetransformering ger (med variabeln z) att

$$\tilde{u}(z) + \tilde{u}(z)(1/z) = \tilde{g}(z).$$

Alltså får vi

$$\tilde{u}(z) = \tilde{g}(z) \frac{z}{z + 1} = \tilde{g}(z) - \tilde{g}(z) \frac{1}{z + 1}.$$

Med inverstranformering följer det att

$$u(t) = g(t) - g * (e^{-t}) = g(t) - \int_0^t e^{-(t-s)} g(s) ds = g(t) - e^{-t} \int_0^t e^s g(s) ds.$$

b. Säg nu att $g(t) = 0$ för $t < 1$ och $g(t) = 1$ för $t > 1$. Vi får två fall:
(i) $t < 1$. Då ger lösningsformeln att $u(t) = 0$.
(ii) $t > 1$. Då ger lösningsformeln att

$$u(t) = g(t) - e^{-t} \int_0^t e^s g(s) ds = 1 - e^{-t} \int_1^t e^s ds = e^{1-t}.$$

8. Använd definitionen av komplex kurvintegral:

$$\int_{|z|=1} f(\bar{z}) dz = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{-it}) i e^{it} dt = - \int_{\pi}^{-\pi} f(e^{it}) i e^{-it} dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) i e^{-it} dt = \int_{|z|=1} f(z) dz / z^2.$$

Enligt Cauchys integralformel för derivatan är detta lika med $2\pi i f'(0)$.