# 1. LÖSNINGAR TILL MVE025/MVE295, 2015-10-27

1. (a)
$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixt}}{t^2 - 4t + 13} dt = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{-ixt}}{t^2 - 4t + 13} dt.$$
Låt $C_R$ vara den vanliga halvcirkeln i övre halvplanet med radie $R$ (och 0 i mitten av diametern). Låt
$$h(w) = \frac{e^{-ixw}}{w^2 - 4w + 13}.$$
Då har $h$ en singulär punkt $w_0 = 2 + 3i$ innanför $C_R$. Residysatsen ger att
$$\int_{C_R} h(w)dw = 2\pi i Res(h, w_0) = 2\pi i \frac{e^{-ixw_0}}{2w_0 - 4} = (\pi/3)e^{-2ix+3x}.$$
Om $x \leq 0$ och $\Gamma_R = \{w \in C_R; \operatorname{Im} w > 0\}$ är
$$|\int_{\Gamma_R} h(w)dw| \leq \pi R \max_{\Gamma_R} |h| \leq \max \frac{e^{x \operatorname{Im} w}}{R^2 - 4R - 13} \to 0$$
då $R \to \infty$. ( Här används att $x \leq 0$ och $\operatorname{Im} w \geq 0$.) Det följer att
$$\hat{f}(x) = \lim_{R\to\infty} h(t)dt == (\pi/3)e^{-2ix+3x}.$$
Detta gäller om $x \leq 0$. Om $x > 0$ använder vi att
$$\hat{f}(x) = \overline{\hat{f}(-x)} = \overline{(\pi/3)e^{2ix-3x}} = (\pi/3)e^{-2ix-3x}.$$
Sammantaget är alltså $\hat{f}(x) = (\pi/3)e^{-2ix-3|x|}$ för alla $x$.

(b) Vi observerar att $g(t) = (-1/2)f'(t)$. Det följer att
$$\hat{g}(x) = (-1/2)\hat{f'} = (-ix/2)\hat{f}(x).$$

2.(a) Vi beräknar först antalet nollställen i $|z| < 2$. Skriv $p(z) = f(z) + g(z)$ där $f(z) = 2z^5$ och $g(z) = -6z^2 + z + 1$. När $|z| = 2$ gäller $|f(z)| = 2|z|^5 = 64$ och $|g(z)| \leq 6|z|^2 + |z| + 1 = 24 + 2 + 1 = 27$. Vi ser alltså att $|f| > |g|$ då $|z| = 2$. Rouchés sats ger då att $p$ och $f$ har lika många nollställen i $|z| < 2$, dvs 5 stycken.

Därefter beräknar vi antalet nollställen för $|z| < 1$. Skriv nu istället $p = f + g$ där $f(z) = -6z^2$ och $g(z) = 2z^5 + z + 1$. En snarlik räkning visar att
$$|f(z)| = 6 > 4 \geq |g(z)|$$
då $|z| = 1$. Igen har alltså enligt Rouché $f$ och $p$ lika många nollställen, dvs 2 stycken, i $|z| < 1$. Antalet nollställen till $p$ i cirkelringen är därför 5-2=3.

(b) Låt $C_R$ vara en halvcirkel i vänstra halvplanet med radie $R >> 0$, så att $C_R = \Gamma_R \cup I_R$ där

$$\Gamma_R = \{z; |z| = R, \operatorname{Re} z < 0\}, \quad I_R = [-iR, iR].$$

Vi beräknar argumentvariationen av $p$ på $\Gamma_R$ och $I_R$. Argumentvariationen på $\Gamma_R$ är nästan lika med Argvar av $2z^5$ om $R$ är stort, dvs nästan lika med $5\pi$.

För att beräkna variationen på $I_R$ skriver vi $z = it$, där $-R \leq t \leq R$. Då är $p(z) = p(it) = i(t^5 + t) + 6t^2 + 1$. Kurvan $p(it)$ ligger alltså hela tiden i högra halvplanet. Dessutom är argumentet av $p(iR)$ nästan lika med $\pi/2$ och argumentet av $p(-iR)$ är nästan lika med $-\pi/2$, eftersom $t^5 >> t^2$. Argumentet av $p(it)$ ökar alltså med ungefär $\pi$ när $t$ går från $-R$ till $R$, så argumentvariationen på $I_R$ är ungefär $\pi$. Sammantaget blir argumentvariationen på $C_R$ exakt lika med $6\pi$ eftersom den totala variationen längs en sluten kurva alltid är en hel multipel av $2\pi$. Antalet nollställen innaför $\Gamma_R$ är alltså $6\pi/2\pi = 3$ och eftersom detta gäller för alla stora $R$ är detta också antalet nollställen i vänstra halvplanet.

3. $e^z$ är inte 0 i 0, och $z(z^2 + 1)$ har ett enkelt nollställe i origo. $f$ har därför en enkel pol i origo, och därför en Laurentserieutveckling

$$f(z) = c_{-1}/z + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ....$$

Dessutom är $z(z^2 + 1)f(z) = e^z = 1 + z + z^2/2 + z^3/6 + ...$ Därför ger identifikation av koefficienterna att $c_{-1} = 1, c_0 = 1, c_1 + c_{-1} = 1/2, c_2 + c_0 = 1/6$, så $c_{-1} = 1, c_0 = 1, c_1 = -1/2, c_2 = -5/6$.

Det följer att Laurentserieutvecklingen av $f(z)/z^3$ är

$$f(z)/z^3 = \frac{c_{-1}}{z^4} + \frac{c_0}{z^3} + \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z} + ...$$

Alltså är Residyn av $f/z^3$ i origo lika med $c_2 = -5/6$. Residysatsen ger att integralen blir $2\pi i(-5/6) = -5\pi i/3$.

4. Området begränsas av Im-axeln och cirkeln $|z - 1| = 1$. Eftersom $f(0) = \infty$ och $f(\infty) = -1$ avbildas Im-axeln på en linje genom punkten -1. Dessutom är det klart att Re-axeln avbildas på sig själv eftersom $f$ bara har reella koefficienter. Bilden av Im-axeln måste därför skära Re-axeln under rät vinkel, så bilden är linjen $\operatorname{Re} z = -1$. Eftersom $f(1) = 1$ avbildas högra halvplanet på området till höger om den linjen.

Vi tittar sen på bilden av cirkeln. Eftersom $f(0) = \infty$ och $f(2) = 0$ måste cirkeln avbildas på en linje genom origo. Eftersom cirkeln skär Re-axeln under rät vinkel måste bilden också göra det, så bilden av cirkeln är Im-axeln. Eftersom igen $f(1) = 1$ avbildas området innaför cirkeln på högra halvplanet och området utanför cirkeln på vänstra halvplanet. Området i uppgiften avbildas därför på snittet av vänstra halvplanet och området till höger om linjen $\operatorname{Re} z = -1$, dvs på $\{z; -1 < \operatorname{Re} z < 0\}$.

5. Vi använder räknereglerna för Laplacetransformen. Först

$$L(e^{-t})(s) = 1/(s + 1).$$

Sen

$$L(t^k e^{-t})(s) = (-d/ds)^k L(e^{-t})(s) = k!/(s + 1)^{k+1}.$$

Sen

$$L((d/dt)^k t^k e^{-t}) = s^k L(t^k e^{-t})(s) = (k!s^k)/(s + 1)^{k+1},$$

eftersom $u(t) = t^k e^{-t}$ uppfyller $u(0) = u'(0) = ...u^{(k-1)}(0) = 0$. Därför blir

$$L(p_k(t))(s) = (1/k!)L((d/dt)^k t^k e^{-t})(s-1) = \frac{(s-1)^k}{s^{k+1}}.$$

8. Tag $R$ så stort att alla $z_j$ uppfyller $|z_j| < R$. Då ger Residysatsen att

$$\int_{|z|=R} \frac{1}{p(z)} dz = 2\pi i \sum_1^n Res(1/p, z_j) = 2\pi i \sum 1/p'(z_j).$$

Sedan ger en uppskattning med triangelolikheten (som i beviset för algebrans fundamentalsats) att $|p(z)| \geq C|z|^n = CR^n$ om $|z| = R >> 0$. Det följer att

$$|\int_{|z|=R} \frac{1}{p(z)} dz| \leq 2\pi R/(CR^n) \to 0$$

när $R \to \infty$ om $n > 1$. Därför är

$$\sum 1/p'(z_j) = 0.$$