Lösningar till Tenta i MVE025/MVE295, Komplex (matematisk) analys, F2 och TM2/Kf2

2016 12 22, 08.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Mattias Lennartsson, 031-7725325

Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39 (4), 40-50 (5)

---

1. a) Använd residykalkyl för att beräkna Fouriertransformen av

$$f(t) := \frac{t}{(t^2+1)(t^2+9)}.$$

(6p)

b) Använd resultatet i (a) för att bestämma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\sin t}{(t^2+1)(t^2+9)}dt.$$

(1p)

Lösning: a) Enligt definition är Fouriertransformen

$$\hat{f}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{te^{-ixt}}{(t^2+1)(t^2+9)}dt.$$

Om

$$g(z) := \frac{ze^{-ixz}}{(z^2+1)(z^2+9)}$$

så är alltså

$$\hat{f}(x) = \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]} g(z)dz.$$

Antag nu att $x \leq 0$ och låt $\gamma_R(t) := Re^{it}$, $t \in [0,\pi]$ och $\sigma_R := [-R,R] \cup \gamma_R$. Då $x \leq 0$ och $Im(z) \geq 0$ på γ_R får vi att $|e^{-ixz}| = e^{xIm(z)} \leq 1$ för $z \in \gamma_R$, och vidare med hjälp av omvända triangelolikheten följer att

$$|g(z)| \leq \frac{R}{(R^2-1)(R^2-9)}$$

på γ_R. Via uppskattning av kurvintegraler får vi därför att

$$|\int_{\gamma_R} g(z)dz| \leq \max_{z\in\gamma_R} |g(z)||\gamma_R| \leq \frac{\pi R^2}{(R^2-1)(R^2-9)},$$

vilket går mot noll då $R \to \infty$. Det följer att

$$\hat{f}(x) = \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]} g(z)dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_R} g(z)dz.$$

Kurvintegralen $\int_{\sigma_R} g(z)dz$ räknar vi nu ut medelst residykalkyl. Vi ser att $g(z)$ är holomorf i $\mathbb{C}$ förutom singulariteter i punkterna $\pm i$ och $\pm 3i$. Av dessa ligger i och $3i$ i det inre av σ_R då $R > 3$. Enligt sats är

$$Res_i g = \left(\frac{ze^{-ixz}}{(z+i)(z^2+9)}\right)_{|z=i} = \frac{e^x}{16},$$

samt

$$Res_{3i} g = \left(\frac{ze^{-ixz}}{(z^2+1)(z+3i)}\right)_{|z=3i} = -\frac{e^{3x}}{16}.$$

Vi får då enligt Residysatsen att

$$\hat{f}(x) = \lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_R} g(z)dz = 2\pi i(Res_i g + Res_{3i} g) = \frac{\pi i}{8}(e^x - e^{3x}).$$

Kom ihåg att detta förutsatte att $x \leq 0$. Men vi kan använda att $\hat{f}(-x) = \overline{\hat{f}(x)}$ och får därför att

$$\hat{f}(x) = sgn(x)\frac{\pi i}{8}(e^{-3|x|} - e^{-|x|}).$$

Kom ihåg att $sgn(x) := 1$ då $x \geq 0$ medan $sgn(x) := -1$ för $x > 0$.

b) Vi noterar att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\sin t}{(t^2+1)(t^2+9)}dt = Im(\hat{f}(-1)) = \frac{\pi}{8}(e^{-1} - e^{-3}).$$

2. Bestäm antalet lösningar till ekvationen $z^5 + 4z^3 = e^{iz}$ i området $\{z : 1 < |z| < 3\}$. (7p)

Lösning: Skriv $f(z) := z^5, g(z) := 4z^3 - e^{iz}$. Med hjälp av triangelolikheten får vi på $\partial D(0,3)$ att

$$|g(z)| \leq 4|z|^3 + |e^{iz}| \leq 4\cdot 3^3 + e^3 \leq 5\cdot 3^3 < 3^5 = |f(z)|.$$

Rouches sats säger då att f och $f+g$ har lika många nollställen i $D(0,3)$ (räknat med multiplicitet), dvs 5 st. Detta betyder att ekvationen har fem lösningar i $D(0,3)$.

Skriv nu istället $f(z) := 4z^3$ och $g(z) := z^5 - e^{iz}$. Med hjälp av triangelolikheten får vi på $\partial D(0,1)$ att

$$|g(z)| \leq |z|^5 + |e^{iz}| \leq 1 + e < 4 = 4|z|^3 = |f(z)|. \tag{1}$$

Rouches sats säger då att f och $f+g$ har lika många nollställen i $D(0,1)$ (räknat med multiplicitet), dvs 3 st. Detta betyder att ekvationen har tre lösningar i $D(0,1)$. Då $|f| > |g|$ på $\partial D(0,1)$ finns heller inga lösningar där, såantalet lösningar till ekvationen $\{z : 1 < |z| < 3\}$ är antalet lösningar till ekvationen i $D(0,3)$ minus antalet lösningar till ekvationen i $D(0,1)$, dvs två.

3. a) Beräkna Laplacetransformen av

$$f(t) := \int_0^t \sin u \cos(t-u)du.$$

(3p)

b) Använd (a) för att bestämma $f(t)$ explicit. (4p)

Lösning: a) Vi noterar först att $f(t) = \sin t * \cos t$. Enligt sats är Laplacetransformen av en konvolution lika med produkten av Laplacetransformerna av de enskilda funktionerna. Vi får därför

$$\mathcal{L}f = \mathcal{L}(\sin t)\mathcal{L}(\cos t) = \frac{1}{s^2+1}\frac{s}{s^2+1} = \frac{s}{(s^2+1)^2},$$

där vi fick Laplacetransformen av sinus och cosinus från tabell.

b) Vi noterar nu att

$$\frac{s}{(s^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'.$$

Enligt sats är $\mathcal{L}(tg(t)) = -(\mathcal{L}g)'(s)$ så vi får att

$$\mathcal{L}f = \mathcal{L}(\frac{1}{2}t\sin t)$$

och därför

$$f(t) = \frac{1}{2}t\sin t.$$

4. Låt S vara cirkelsektorn $S := \{z : 0 < |z| < \sqrt{2}, 0 < Arg(z) < \pi/4\}$. Bestäm bilden av S under avbildningen

$$f(z) := \frac{z^2+2}{z^2+1}.$$

(Tips: notera att $f(z)$ är sammansatt av z^2 och $\frac{z+2}{z+1}$.) (7p)

Lösning: Avbildningen z^2 dubblar argumentet samt kvadrerar absolutbeloppet, så z^2 avbildar S på kvartscirkeln $S' := \{z : 0 < |z| < 2, 0 < Arg(z) < \pi/2\}$. Låt $M(z) := \frac{z+2}{z+1}$, vilket vi ser är en Möbiusavbildning. Då f är sammansatt av z^2 och M följer det att $f(S) = M(S')$. S' avgränsas av $\mathbb{R}, i\mathbb{R}$ samt $C(0,2)$. Enligt sats avbildar en Möbiusavbildning en cirkel eller linje på en cirkel eller linje. Vi noterar att $M(\infty) = 1, M(0) = 1/2$ samt $M(2) = 3/4$ så den reella linjen avbildas påen cirkel eller linje genom dessa tre punkter, vilket endast kan vara den reella linjen, alltså $M(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Vidare ŕ $M(-2) = \infty$, så bilden av $C(0,2)$ är en linje som passerar $3/4$, och pga konformitet bildar den en rät vinkel till den reella linjen, dvs vi får att $M(C(0,2)) = 3/4 + i\mathbb{R}$. Vi noterar att $M(2i) = 3/4 + i/4$. Igen pga konformitet är $M(i\mathbb{R})$ en linje eller cirkel som skär $\mathbb{R}$ i rät vinkel i punkten $3/4$ samt skär $3/4 + i\mathbb{R}$ i rät vinkel i punkten $3/4 + i/4$. Alltså får vi $M(i\mathbb{R}) = C(3/4, 1/4)$. Då S' avgränsas av $\mathbb{R}, i\mathbb{R}$ samt $C(0,2)$ får vi att $M(S')$ avgränsas av $\mathbb{R}, 3/4 + i\mathbb{R}$ samt $C(3/4, 1/4)$. Randen till $M(S')$ kommer också innehålla punkterna $M(0) = 1/2, M(2) = 3/4$ samt $M(2i) = 3/4 + i/4$ vilket ger oss att $f(S) = M(S') = \{z : 0 < |z - 3/4| < 1/4, \pi/2 < Arg(z - 3/4) < \pi\}$, dvs en kvartscirkel med radie $1/4$ centrerad i $3/4$, med vinklar mellan $\pi/2$ och π.

5. Antag att Laurentserien $f(z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-1)^k$ konvergerar i området $\{z : 1 < |z-1| < 5\}$. Bestäm

$$\int_{|z|=3} \frac{f(z)}{z^2(z-1)^2}dz.$$

(7p)

Lösning: Vi börjar med att hitta en Laurentutveckling av $\frac{1}{z^2(z-1)^2}$ centrerad i $z = 1$ som är giltig i $\{z : 1 < |z-1| < 5\}$. Sätt $w = z - 1$. Vi har då att

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{w+1} = \frac{1}{w}\frac{1}{1+1/w} = \frac{1}{w}\frac{1}{1-(-1/w)} = \frac{1}{w}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k w^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k w^{-k-1}.$$

We also get

$$\frac{1}{z^2} = -\left(\frac{1}{z}\right)' = -\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k w^{-k-1}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}(-k-1)w^{-k-2}$$

and thus

$$\frac{1}{z^2(z-1)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}(-k-1)w^{-k-4} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m w^m,$$

där $b_m := (-1)^{m+1}(m+3)$ för $m \leq -4$, medan $b_m := 0$ för $m > -4$. Vi vet nu att

$$\frac{f(z)}{z^2(z-1)^2} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k w^k\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k w^k\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k w^k,$$

där $c_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{k-m} b_m$. Speciellt är

$$c_{-1} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{-1-m} b_m = \sum_{k=3}^{\infty}(-1)^k(2-k)a_k.$$

Då kurvan $|z| = 3$ är homotop med $|z-1| = 3$ i $\{z : 1 < |z-1| < 5\}$ har vi enligt Cauchys sats och satsen om Laurentserieutveckling att

$$\int_{|z|=3} \frac{f(z)}{z^2(z-1)^2}dz = \int_{|z-1|=3} \frac{f(z)}{z^2(z-1)^2}dz = 2\pi i c_{-1} = 2\pi i\sum_{k=3}^{\infty}(-1)^k(2-k)a_k.$$

6. Formulera och bevisa Cauchys integralformel (för funktionen och inte dess derivata). (5p)

   LÃűsning: Se bok eller förelÃd'sningsanteckningar.

7. Låt f vara holomorf i den punkterade cirkelskivan $\{z : 0 < |z| < 1\}$. Definiera vad som menas med att f:s singularitet i 0 är i) hävbar, ii) en pol, eller iii) väsentlig. Bevisa att singulariteten är hävbar om och endast om

   $$\lim_{z\to 0} zf(z) = 0.$$

   (5p)

   Lösning: Se bok eller förelÃd'sningsanteckningar (Proposition 9.5a).

8. Låt $f(z)$ vara en hel funktion (dvs holomorf på hela $\mathbb{C}$). Antag att $|f(z)| \leq (1+|z|)^k$ för ett givet $k \in \mathbb{N}$. Visa att $f(z)$ är ett polynom i z, och att dess grad är högst k. (5p)

Lösning: Enligt satsen om Taylorutveckling så kan $f(z)$ skrivas som en konvergent potensserie

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m,$$

där

$$a_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{m+1}} dz.$$

Anta nu att $m \geq k+1$. Enligt uppskattning av kurvintegraler har vi att

$$|a_m| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{m+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{|z|=R} \left| \frac{f(z)}{z^{m+1}} \right| 2\pi R = \frac{\max_{|z|=R} |f(z)|}{R^m} \leq \frac{(1+R)^k}{R^m} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

givet att $m \geq k+1$. Alltså är $a_m = 0$ för alla $m \geq k+1$, dvs

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m = \sum_{m=0}^{k} a_m z^m.$$

Vi ser alltså att $f(z)$ är ett polynom i z av grad högst k.

Lycka till!
David