Lösningar till Tenta i MVE025/MVE295, Komplex (matematisk) analys, F2 och TM2/Kf2

2016 10 27, 08.30-12.30

---

1. Lös med hjälp av Laplacetransform begynnelsevärdesproblemet

$$u''(t) - 2u'(t) + u(t) = te^t, \qquad t > 0,$$

med begynnelsevärdesvillkor $u(0) = 1$ och $u'(0) = 1$. (5p)

Lösning: Laplacetransformen av ekvationen ger att

$$\tilde{u} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^4}.$$

Enligt räkneregler för Laplacetransformen har vi att $\mathcal{L}(e^t) = \frac{1}{s-1}$ samt $\mathcal{L}(tf) = -\mathcal{L}(f)'$ så speciellt är

$$\mathcal{L}(t^3 e^t) = (-1)^3 \left(\frac{1}{s-1}\right)^{(3)} = \frac{3!}{(s-1)^4}.$$

Sammantaget leder detta till att får

$$u(t) = e^t \left(1 + \frac{t^3}{6}\right).$$

2. Bestäm antalet nollställen till polynomet $p(z) := z^7 + z^3 + 1$ i områdena:

a) $D(0,2) := \{z : |z| < 2\}$, (2p)

b) första kvadranten, dvs $\{z : z \neq 0, 0 < \mathrm{Arg}(z) < \pi/2\}$. (4p)

Lösning:

a) Vi noterar att då $|z| = 2$ har vi

$$|z^3 + 1| \leq |z|^3 + 1 = 9 < 128 = |z^7|.$$

Det följer därför från Rouchés sats att funktionerna $z^7 + z^3 + 1$ och z^7 har lika många nollställen i $D(0,2)$, dvs sju stycken då z^7 bara har ett nollställe, nämligen det i 0, vilket har multiplicitet 7.

b) Kom ihåg att vi för en inte nödvändigvis sluten kurva γ som undviker origo definierar

$$\mathrm{argvar}(\gamma) := \mathrm{Im} \int_\gamma \frac{1}{z} dz,$$

och att vi då γ är sluten får att

$$\mathrm{argvar}(\gamma) = 2\pi W(\gamma),$$

där $W(\gamma)$ betecknar vindningstalet för γ.

Låt $\gamma_R(t) := Re^{it}, t \in [0, \pi/2]$ och $\sigma_R := [0, R] \cup \gamma_R \cup [iR, 0]$, dvs σ_R är den slutna kurva som positivt parametriserar randen till cirkelsektorn $\{z : z \neq 0, 0 < \mathrm{Arg}(z) < \pi/2\} \cap \{z : |z| < R\}$. Vi skriver $f(z) := z^7 + z^3 + 1$.

Vi studerar först f längs linjesegmentet $[0, R]$. Vi har $f(x) = x^7 + x^3 + 1$ så för alla $x \in [0, R]$ ligger $f(x)$ på positiva reella axeln, vilket betyder att argvar$(f([0, R])) = 0$.

Nu ser vi på argumentvariationen längs $f(\gamma_R)$. För R stort har vi att argumentet för $f(\gamma_R(t)) = f(Re^{it})$ approximeras av argumentet för $(Re^{it})^7 = R^7 e^{i7t}$ dvs $7t$, vilket leder till att argvar$(f(\gamma_R)) \approx 7\pi/2$ (t:s variation är ju $\pi/2$).

Nu tittar vi på f:s restriktion till $[iR, 0]$. Vi har $f(iy) = -iy^7 - iy^3 + 1 = 1 - i(y^7 + y^3))$. Speciellt är argumentet för $f(iR)$ approximerat av argumentet till $-iR^7$ dvs $-\pi/2$ (välbestmt upp till multipel av 2π) medan $f(0) = 1$ har argument 0 (välbestämt upp till multipel av 2π). Då Re$f(iy) = 1$ följer det att argvar$(f([iR, 0])) \approx \pi/2$ (ses enklast med figur).

Sammantaget får vi att argvar$(f(\sigma_R)) \approx 4\pi$ för $R \gg 1$. Detta betyde att $W(f, \sigma_R) = 2$ för stora R, och enligt Argumentprincipen får vi då att $z^7 + z^3 + 1$ har två nollställen i cirkelsektorn $\{z : z \neq 0, 0 < \text{Arg}(z) < \pi/2\} \cap \{z : |z| < R\}$ för stora R, och alltså har $z^7 + z^3 + 1$ två nollställen i första kvadranten.

3. Beräkna integralen

$$\int_{|z+1|=2} \frac{(z-1)^2}{z^2(z+1)} dz$$

på två sätt:

a) genom att använda residykalkyl, (5p)

b) genom att först utveckla $\frac{(z-1)^2}{z^2(z+1)}$ som en Laurentserie centrerad i punkten -1 och giltig i området $\{z : |z+1| > 1\}$. (Glöm inte att sen bestämma integralen!) (5p)

Lösning:

a) Funktionen $f(z) := \frac{(z-1)^2}{z^2(z+1)}$ är holomorf i $\mathbb{C}$ förutom i dess två singulariteter i punkterna 0 och -1. Båda dessa ligger i det inre av kurvan $C(-1, 2)$ som vi ska integrera längs. Residyerna av f i dessa punkter blir enligt kända räkneregler

$$\text{Res}_0 \left(\frac{(z-1)^2}{z^2(z+1)} \right) = \left(\frac{(z-1)^2}{z+1} \right)'_{|z=0} = -3,$$

samt

$$\text{Res}_{-1} \left(\frac{(z-1)^2}{z^2(z+1)} \right) = \left(\frac{(z-1)^2}{z^2} \right)_{|z=-1} = 4.$$

Residysatsen ger oss därför att

$$\int_{|z+1|=2} \frac{(z-1)^2}{z^2(z+1)} dz = 2\pi i(-3+4) = 2\pi i.$$

b) Vi börjar med att skriva

$$\frac{(z-1)^2}{z^2} = \frac{z^2 - 2z + 1}{z^2} = 1 - 2\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}.$$

Vi letar efter en Laurentserieutvecking av $1/z$ och $1/z^2$ centrerad i -1 och giltig i $|z+1| > 1$. Vi låter därför $w := z + 1$, dvs $z = w - 1$. Eftersom $|z+1| > 1 \iff \left|\frac{1}{w}\right| < 1$ får vi

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{w-1} = \frac{1}{w} \frac{1}{1 - (1/w)} = \frac{1}{w} \sum_{k=0}^{\infty} (1/w)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} w^k.$$

Vi får då också att

$$\frac{1}{z^2} = -\left(\frac{1}{z}\right)' = -\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} w^k\right)' = -\sum_{k=-\infty}^{-1} kw^{k-1} = -\sum_{k=-\infty}^{-2} (k+1)w^k.$$

När vi sätter samman detta får vi

$$\frac{(z-1)^2}{z^2(z+1)} = \frac{1}{z+1}\left(1 - 2\sum_{k=-\infty}^{-1}(z+1)^k - \sum_{k=-\infty}^{-2}(k+1)(z+1)^k\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z+1)^k$$

där alltså $c_k = 0$ för $k \geq 0$, $c_k = -k-4$ för $k \leq -3$, medan $c_{-1} = 1$ samt $c_{-2} = -2$.

Enligt satsen om Laurentserieutveckling har vi att

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z+1|=2} \frac{f(z)}{(z+1)^{k+1}}dz,$$

så speciellt får vi att

$$\int_{|z+1|=2} \frac{(z-1)^2}{z^2(z+1)}dz = 2\pi i c_{-1} = 2\pi i.$$

4. Hitta en konform avbildning som avbildar området $G := \{z : |z| < 1\} \cap \{z : \mathrm{Re}(z) > 0\}$ på:

a) öppna övre halvplanet, (5p)

b) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ (dvs $\mathbb{C}$ förutom de ickenegativa reella talen). (2p)

Lösning: Notera att denna uppgift inte har en unik lösning utan kan lösas på olika sätt.

a) Vi börjar med att hitta en Möbiusavbildning $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ sådan att $M(-i) = 0, M(1) = 1$ samt $M(i) = \infty$. Vi får att $M(-i) = 0 \Rightarrow b = ia$, vi kan därför sätta $a = 1, b = i$. Vidare $M(i) = \infty \Rightarrow d = -ic$. Slutligen $M(1) = 1 \Rightarrow c = i$ dvs

$$M(z) = \frac{z+i}{iz+1}.$$

En Möbiusavbildning alltid avbildar cirklar och linjer på cirklar och linjer. Vi får därför att M avbildar enhetscirkeln på en cirkel eller linje som innehåller punkterna $0, 1$ och ∞, vilket måste vara den reella axeln. Å andra sidan avbildar M den imaginära axeln på en cirkel eller linje som innehåller punkterna 0 och ∞ dvs en linje som skär origo. Då enligt sats varje Möbiusavbildning är konform så bevarar M den räta vinkeln mellan enhetscirkeln och imaginära axeln i punkten $-i$, vilket implicerar att den imaginära axeln avbildas på sig själv. Området G begränsas av just enhetscirkeln och imaginära axeln och det följer att $M(G)$ är ett område som begränsas av den reella och imaginära axeln, dvs $M(G)$ måste vara någon av de fyra kvadranterna. Vilken kvadrant vi får kan ses på olika sätt; ett sätt är att notera att randen till $M(G)$ innehåller punkterna $M(1) = 1$ och $M(0) = i$, vilket ger oss att $M(G)$ är den första kvadranten.

Vi har dessutom att z^2 konformt avbildar den första kvadranten på det öppna övre halvplanet. Vi får därför att sammansättningen

$$\left(\frac{z+i}{iz+1}\right)^2$$

avbildar G konformt på det öppna övre halvplanet.

b) Vi noterar att z^2 avbildar konformt det öppna övre halvplanet på just $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ så z^2 sammansatt med vår tidigare avbildning, vilket blir

$$\left(\frac{z+i}{iz+1}\right)^4,$$

avbildar G konformt på$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$.

5. Använd residykalkyl för att beräkna integralen

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3} dx.$$

(Tips: integrera längs ränderna till cirkelsektorerna
$\{z : z \neq 0, 0 < \mathrm{Arg}(z) < 2\pi/3\} \cap \{z : |z| < R\}, R \gg 1.$)
Utför de nödvändiga uppskattningarna. (7p)

Lösning: Låt $\gamma_R(t) := Re^{it}, t \in [0, 2\pi/3]$ och $\sigma_R := [0, R] \cup \gamma_R \cup [Re^{2\pi i/3}, 0]$, dvs σ_R parametriserar positivt randen till cirkelsektorn $\{z : z \neq 0, 0 < \mathrm{Arg}(z) < 2\pi/3\} \cap \{z : |z| < R\}$.

Med hjälp av uppskattning för kurvintegraler får vi att

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^3} dz\right| \leq \sup_{z \in \gamma_R} \left|\frac{1}{1+z^3}\right| |\gamma_R| \leq \frac{2\pi R}{3(R^3-1)} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Vi har också att

$$\int_{[0,R]} \frac{1}{1+z^3} dz = \int_0^R \frac{1}{1+x^3} dx.$$

Om vi parametriserar linjesegmentet $[0, Re^{2\pi i/3}]$ (observera den omvända orientationen!) med $e^{2\pi i/3}x, x \in [0, R]$ får vi tack vare att $(e^{2\pi i/3}x)^3 = x^3$ tillsammans med definitionen av kurvintegral att

$$\int_{[Re^{2\pi i/3},0]} \frac{1}{1+z^3} dz = -\int_{[0,Re^{2\pi i/3}]} \frac{1}{1+z^3} dz = -e^{2\pi i/3} \int_0^R \frac{1}{1+x^3} dx.$$

Vi får alltså

$$\int_{\sigma_R} \frac{1}{1+z^3} dz = (1 - e^{2\pi i/3}) \int_0^R \frac{1}{1+x^3} dx + \int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^3} dz \underset{R\to\infty}{\longrightarrow}$$
$$\underset{R\to\infty}{\longrightarrow} (1 - e^{2\pi i/3}) \int_0^\infty \frac{1}{1+x^3} dx.$$

Funktionen $f \frac{1}{1+z^3}$ är holomorf i $\mathbb{C}$ förutom i singulariteterna $-1, e^{\pi i/3}$ och $e^{-\pi i/3}$. Utav dessa ligger bara $e^{\pi i/3}$ inuti cirkelsektorerna $\{z : z \neq 0, 0 < \mathrm{Arg}(z) < 2\pi/3\} \cap \{z : |z| < R\}, R > 1$. Residyn av f i $e^{\pi i/3}$ blir enligt räkneregel

$$\mathrm{Res}_{e^{\pi i/3}} \frac{1}{1+z^3} = \left(\frac{1}{(z+1)(z-e^{-\pi i/3})}\right)_{|z=e^{\pi i/3}} = \frac{1}{(e^{\pi i/3}+1)(e^{\pi i/3}-e^{-\pi i/3})},$$

så enligt residysatsen är

$$\int_{\sigma_R} \frac{1}{1+z^3} dz = \frac{2\pi i}{(e^{\pi i/3}+1)(e^{\pi i/3}-e^{-\pi i/3})}.$$

Sammantaget får vi att

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3} dx = \frac{2\pi i}{(1-e^{2\pi i/3})(e^{\pi i/3}+1)(e^{\pi i/3}-e^{-\pi i/3})}.$$

Då $e^{\pi i/3} = (1+i\sqrt{3})/2$ samt $e^{2\pi i/3} = (-1+i\sqrt{3})/2$ leder en enkel uträkning till att

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3} dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

6. Formulera och bevisa satsen om Taylorutveckling av holomorfa funktioner. (5p)

   Lösning: Se boken.

7. Formulera och bevisa Rouchés sats. (5p)

   Lösning: Se föreläsningsanteckningar.

8. Låt u och v vara två harmoniska funktioner i $\mathbb{C}$. Antag dessutom att $\nabla u = \nabla v$ på $\mathbb{R}$ (∇u och ∇v betecknar gradienten av u respektive v). Använd identitetsprincipen för att visa att $u - v$ är konstant i $\mathbb{C}$. (5p)

   Lösning: Låt $p_1 := \frac{\partial u}{\partial x}, q_1 := -\frac{\partial u}{\partial y}$ samt $f(z) := p_1(z) + iq_1(z)$. På liknande sätt låter vi $p_2 := \frac{\partial v}{\partial x}, q_2 := -\frac{\partial v}{\partial y}$ samt $g(z) := p_2(z) + iq_2(z)$. Vi noterar att då u är harmonisk så har vi att

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial q_1}{\partial y}.$$

   En harmonisk funktion är C^2 vilket också gör att

$$\frac{\partial p_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial q_1}{\partial x}.$$

   Detta betyder att f är C^1 samt att dess partiella derivator uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer, vilket enligt sats implicerar att f är holomorf (i hela $\mathbb{C}$). Exakt samma resonemang kan appliceras på funktionen g, dvs g är också holomorf i $\mathbb{C}$.

   Antagandet att $\nabla u = \nabla v$ på $\mathbb{R}$ säger att $f = g$ på$\mathbb{R}$. Om vi nu tar följden $a_n := 1/n, n \in \mathbb{N}$, så är detta en följd av distinkta punkter i $\mathbb{C}$ som konvergerar mot en punkt i $\mathbb{C}$, nämligen 0. Då uppenbarligen $f(a_n) = g(a_n)$ för alla n så följer från identitetsprincipen att $f = g$ i hela $\mathbb{C}$. Vi får alltså att $\nabla u = \nabla v$ i hela $\mathbb{C}$. Då$\mathbb{C}$ är en öppen och sammanhängande mängd följer det från sats att $u - v$ är konstant i $\mathbb{C}$.

Lycka till!
David