Några specialfall av satser.

"Sats 7.3" *Låt* $f(x):\ ]0 \to \infty[\to \mathbb{C}$ *som uppfyller*

- f *är absolutintegrerbar* ($\int_0^\infty |f(x)|\,dx = M < \infty$)
- $f(0_+) \equiv \lim_{x\to 0} f(x)$ *existerar.*

Då gäller att

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-y^2/2\epsilon^2} f(y)\,dy \quad = \quad \frac{1}{2} f(0_-).$$

Bevis: Detta är ett mycket typiskt analysbevis, som är nyttigt att studera. Först noterar vi att

$$\frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-y^2/2\epsilon^2}\,dy \quad = \quad \left\{ \begin{array}{l} t = y/\epsilon \\ dt = dy/\epsilon \end{array} \right\} \quad =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{a/\epsilon} e^{-t^2/2}\,dt \quad \to \quad \frac{1}{2} \qquad \text{när} \qquad a/\epsilon \to \infty.$$

Vi fortsätter och skriver

$$\frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-y^2/2\epsilon^2} f(y)\,dy =$$

$$\frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{\epsilon}} e^{-y^2/2\epsilon^2} f(y)\,dy + \tag{1}$$

$$\frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{\epsilon}}^\infty e^{-y^2/2\epsilon^2} f(y)\,dy \tag{2}$$

Den andra av dessa integraler försvinner i gränsen då $\epsilon \to 0$, eftersom

$$\left|\frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{\epsilon}}^\infty e^{-y^2/2\epsilon^2} f(y)\,dy\right| \le \int_{\sqrt{\epsilon}}^\infty e^{-1/\epsilon} |f(y)|\,dy$$

$$\le \frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}} e^{-1/\epsilon} \int_{\sqrt{\epsilon}}^\infty |f(y)|\,dy \le \frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}} e^{-1/\epsilon} M,$$

och den sista termen går mot noll då ϵ går mot noll.
Integralen (1) skriver vi som

$$\frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{\epsilon}} e^{-y^2/2\epsilon^2} (f(y) - f(0_+))\,dy \tag{3}$$

$$+ \ f(0_+) \frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{\epsilon}} e^{-y^2/2\epsilon^2}\,dy \tag{4}$$

Integralen i (4) är konvergerar mot $1/2$ när $\epsilon \to \infty$ enligt den första beräkningen i detta bevis. Integralen i (3) konvergerar mot 0, eftersom

$$\left|\frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{\epsilon}} e^{-y^2/2\epsilon^2} (f(y) - f(0_+))\,dy\right|$$

$$\le \sup_{0<y<\sqrt{\epsilon}} |f(y) - f(0_+)| \frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{\epsilon}} e^{-y^2/2\epsilon^2}\,dy\,;$$

integralen i det sista ledet är mindre än 1/2, och $\sup_{0<y<\sqrt{\epsilon}} |f(y) - f(0_+)| \to 0$ när $\epsilon \to 0$, eftersom gränsvärdet existerar. Allt detta tillsammans visar satsen.

Fouriertransformen är kontinuerlig

Låt $f(x) \in L^1$, d.v.s. antag att $\int_0^\infty |f(x)|\, dx < \infty$. Låt Fouriertransformen vara

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi}\, dx\,. \tag{5}$$

Då är $\hat{f}(\xi)$ en kontinuerlig funktion.

Bevis: Beviset är egentligen mycket enkelt om man hänvisar till satsen om dominerad konvergens. Men även utan denna sats, är det ganska lätt att genomföra beviset. Vi vill uppskatta

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi+\eta)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix\xi}(1 - e^{ix\eta})\, dx \right| \\
&\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, |1 - e^{ix\eta}|\, dx \\
&= \int_{|x|>M} |f(x)|\, |1 - e^{ix\eta}|\, dx + \int_{-M}^{M} |f(x)|\, |1 - e^{ix\eta}|\, dx
\end{aligned}$$

där M är ett stort tal. Välj $\epsilon > 0$ godtyckligt. Eftersom $f(x)$ är absolutintegrerbar går den första integralen i sista ledet mot noll då M går mot ∞. Välj då M så stort att denna integral blir mindre än $\epsilon/2$. Den andra integralen skall då göras över ett ändligt stort intervall, och för $\eta < 1/M$ gäller att $|e^{i\eta x} - 1| < CM\eta$ likformigt för alla x i intervallet $-M < x < M$. Om då $\eta < \frac{\epsilon}{2CM}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx\right)^{-1}$ får man

$$\int_{-M}^{M} |f(x)|\, |1 - e^{-ix\eta}|\, dx < \frac{\epsilon}{2} \int_{-M}^{M} |f(x)|\, dx \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx \right)^{-1} < \frac{\epsilon}{2}$$

Med η valt tillräckligt litet, kan man alltså få $|\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi+\eta)|$ hur litet som helst, d.v.s. $\hat{f}$ är kontinuerlig, likformigt på hela reella linjen, till och med.