Tentamen i flervariabelanalys för F1/TM1 (mve035), 10-03-11

uppg. 1

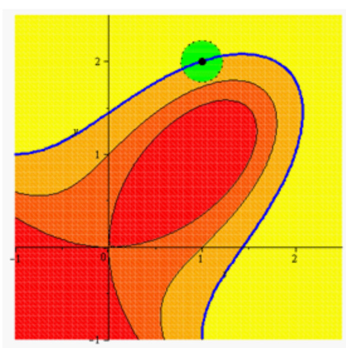
$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ är C^∞, $f(1,2) = 3$.

a) $f'_x = 3x^2 - 3y$, $f'_y = 3y^2 - 3x$, alltså $\operatorname{grad} f(1,2) = (-3, 9)$.
Tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $(1,2,3)$ har ekvationen
$z = f(1,2) + f'_x(1,2)(x-1) + f'_y(1,2)(y-2) = 3 - 3(x-1) + 9(y-2)$.

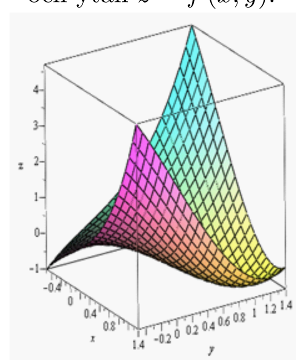
b) $f(x,y)$ växer i $(1,2)$ mest i riktningen $\operatorname{grad} f(1,2)$, alltså i riktningen $(-1,3)$.

c) $f'_y(1,2) = 9 \neq 0$, implicita funktionssatsen ger:
lokalt kring $(1,2)$ är är nivåkurvan $f(x,y) = 3$ en funktionskurva $y = h(x)$,
derivering av $f(x, h(x)) = 3$ ger $f'_x + f'_y h' = 0$, alltså $h'(1) = -\frac{f'_x(1,2)}{f'_y(1,2)} = \frac{1}{3}$.

Nivåkurvorna $f(x,y) = 0$ (Descartes ögla!),
$f(x,y) = 2$ och $f(x,y) = 3$ (blå):



och ytan $z = f(x,y)$:



d) $\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ f'_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \underset{\text{subtrahera}}{\Longrightarrow} x^2 - y^2 - y + x = (x-y)(x+y+1) = 0.$

<u>fall 1</u>: $x = y$: $f'_x(x,x) = 3x(x-1) = 0$, det ger de stationära punkterna $(0,0)$ och $(1,1)$.

<u>fall 2</u>: $x + y + 1 = 0$: $f'_x(x, -1-x) = 3\left(x^2 + x + 1\right) = 0$: ingen lösning

[eller: $f'_x = 0 \implies x^2 = y \underset{f'_y=0}{\implies} x^4 - x = x(x-1)\left(x^2 + x + 1\right) = 0$
$\implies (x = 0 \vee x = 1)$, $f'_y = 0$ ger sedan $(0,0)$ och $(1,1)$ s.o.].

Att origo är en sadelpunkt inses direkt: $f(x,y) = -3xy + \ldots$(ordn. 3 termer), $Q(h,k) = -6hk$ är indefinit (eller: $f(0,0) = 0$ och i varje omgivning $U_\delta : x^2 + y^2 < \delta^2$ till origo ligger punkter där f antar positiva resp. negativa värden, t.ex. $f\left(\frac{-\delta}{2}, 0\right) < 0$, $f\left(\frac{\delta}{2}, 0\right) > 0$).

För att bestämma karaktären hos $(1,1)$ beräknar vi den kvadratiska formen $Q(h,k) = f''_{xx}(1,1)h^2 + 2f''_{xy}(1,1)hk + f''_{yy}(1,1)k^2 = [f''_{xx} = 6x,\ f''_{xy} = -3,$

$f''_{yy}=6y]=6h^2-6hk+6k^2=6\left(\left(h-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{3}{4}k^2\right)$, Q är positivt definit, $(1,1)$ är alltså en sträng lokal minimipunkt. **svar**:

$\boxed{\textbf{a) } 3x-9y+z=-12 \ \textbf{b) } (-1,3) \ \textbf{c) } \tfrac{1}{3} \ \textbf{b) } (0,0)\text{: sadelpkt, } (1,1)\text{: lok. minpkt.}}$

uppg. 2

$f(x,y)=\frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$ för $(x,y)\neq(0,0)$ och $f(0,0)=0$.

a) f är partiellt deriverbar i origo ty $\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\frac{\sin\left(x^2\right)}{x\sqrt[3]{x^2}}=\sqrt[3]{x}\frac{\sin\left(x^2\right)}{x^2}\to 0$ då $x\to 0$ och $\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\frac{\sin\left(y^2\right)}{y\sqrt[3]{y^2}}=\sqrt[3]{y}\frac{\sin\left(y^2\right)}{y^2}\to 0$ då $y\to 0$ $\left(\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1\right)$, alltså är $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$, och f är differentierbar i origo ty

$$\lim_{(x,y)\to(0.0)}\frac{f(x,y)-\left(f(0,0)+f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0.0)}\frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\lim_{\sqrt{x^2y^2}=r\to 0}\sqrt[3]{r}\frac{\sin\left(r^2\right)}{r^2}=0.$$

b) $f(x,y)=\frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}\leq 1$ för $(x,y)\in D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq\frac{\pi}{2}\right\}$

ty för $0<t<\frac{\pi}{2}$ är $0\leq g(t)=\frac{\sin t}{\sqrt[3]{t}}\leq 1$:

för $0<t<1$ är $\frac{\sin t}{\sqrt[3]{t}}<\frac{t}{\sqrt[3]{t}}=\sqrt[3]{t^2}<1$ och för $1\leq t\leq\frac{\pi}{2}$ är $\frac{\sin t}{\sqrt[3]{t}}\leq\frac{1}{\sqrt[3]{t}}\leq 1$.

Den totala massan av $K=\left\{(x,y,z) : x^2+y^2\leq\frac{\pi}{2}, 0\leq z\leq 1-f(x,y)\right\}$ med densitet $\rho(x,y,z)=\sqrt[3]{x^2+y^2}$ är alltså $M(K)=\iiint\limits_K\rho(x,y,z)\,dxdydz=$

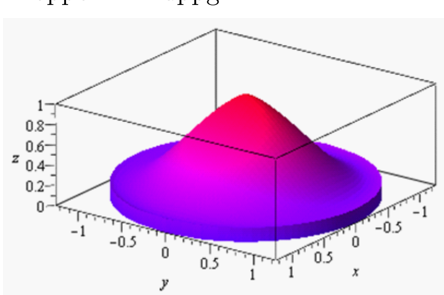
$$=\iint\limits_D\left(\int\limits_0^{1-f(x,y)}\sqrt[3]{x^2+y^2}dz\right)dxdy=\iint\limits_D\sqrt[3]{x^2+y^2}\left(1-\frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}\right)dxdy=$$

$$[\text{pol. koord.}]=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\left(r\sqrt[3]{r^2}-r\sin\left(r^2\right)\right)drd\varphi=2\pi\left[\frac{3}{8}r^{\frac{8}{3}}+\frac{1}{2}\cos\left(r^2\right)\right]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=$$

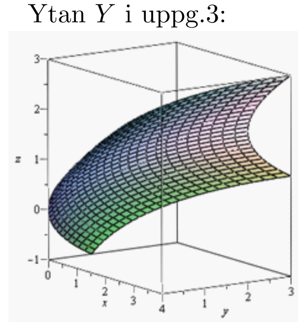
$$=2\pi\left(\frac{3}{8}\frac{\pi}{2}\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{8}\left(3\pi\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}-8\right).$$

$\boxed{\textbf{svar: b) } M(K)=\frac{\pi\left(3\pi\sqrt[3]{4\pi}-16\right)}{16}}$

Kroppen K i uppg.2:



Ytan Y i uppg.3:



uppg.3

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = \left(u^2, u+v^2, u-v\right)$, $D = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2, 0 \le u \le 2, -1 \le v \le 1\right\}$.
$\boldsymbol{v} = (z-y, \sqrt{x}, y-\sqrt{x})$, $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 0 < x\right\}$. $\boldsymbol{v}$ är C^1 i Ω.

a) $\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 2u & 1 & 1 \\ 0 & 2v & -1 \end{vmatrix} = (-1-2v, 2u, 4uv)$, Y:s areaelement är

$dS = |\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v|\, dudv = \sqrt{(1+2v)^2 + 4u^2 + 16u^2v^2}dudv$ och Y:s area är

$m(Y) = \iint\limits_D \sqrt{4u^2(1+4v^2) + (1+2v)^2}dudv$.

b) $\text{rot}\, \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z-y & \sqrt{x} & y-\sqrt{x} \end{vmatrix} = (1, ..., ...) \ne (0,0,0)$, der ger att

$\boldsymbol{v}$ inte är konservativt i Ω, alltså att $\boldsymbol{v}$ inte har en potential i Ω ty "$\boldsymbol{v}$ konservativt" medför "rot$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$".

c) div $\boldsymbol{v} = \frac{\partial}{\partial x}(z-y) + \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x} + \frac{\partial}{\partial z}(y-\sqrt{x}) = 0$, det ger att $\boldsymbol{v}$ är källfritt i Ω, alltså att $\boldsymbol{v}$ har en vektorpotential i Ω ty Ω är konvex.

d) På ytan $Y : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = \left(u^2, u+v^2, u-v\right), (u,v) \in D$ är
$\boldsymbol{v} = (z-y, \sqrt{x}, y-\sqrt{x}) = \left(-v-v^2, u, v^2\right)$ och flödet F av $\boldsymbol{v}$ genom Y i riktningen $\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v$ är $F = \iint\limits_D \boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v dudv =$

$$= \iint\limits_D \left(-v-v^2, u, v^2\right) \bullet (-1-2v, 2u, 4uv)\, dudv =$$

$$= \iint\limits_D \left(\left(v+v^2\right)(1+2v) + 2u^2 + 4uv^3\right) dudv =$$

$$= \int_0^2 \left(\int_{-1}^1 \left(\underbrace{v + (2+4u)\, v^3}_{\text{udda}} + \underbrace{3v^2 + 2u^2}_{\text{jämn}} \right) dv \right) du = \int_0^2 2\left[v^3 + 2u^2 v\right]_{v=0}^{v=1} du =$$

$$= 2\int_0^2 \left(1+2u^2\right) du = 2\left[u + \tfrac{2}{3}u^3\right]_0^2 = \tfrac{4}{3}(3+8) = \tfrac{44}{3}.$$

svar:

a) areaelementet på Y är $dS = \sqrt{4u^2(1+4v^2) + (1+2v)^2}dudv$, Y:s area är $m(Y) = \iint\limits_D \sqrt{4u^2(1+4v^2) + (1+2v)^2}dudv$ **b)** nej **c)** ja **d)** $\frac{44}{3}$

uppg. 4

Vi bestämmer det största och det minsta värde som den elektriska fältstyrkan $|\boldsymbol{E}| = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = f(x,y)$ antar under bivillkoret $g(x,y) = (x+y)^2 + y^2 - 10 = 0$ (dvs. "på ellipsen $\gamma : (x+y)^2 + y^2 = 10$"). γ är kompakt och f är C^0 på γ, alltså antar f på γ ett minsta värde m och ett största M, vidare är γ bågvis sammanhängande, enligt satsen om mellanliggande värden antar då f alla värden mellan m och M och därmed är sökta $V_{|\boldsymbol{E}|} = [m, M]$. Vi bestämmer nu kandidaterna för extrempunkter med Lagranges multiplikatormetod:

$\operatorname{grad} g(x,y) = (2(x+y), 2(x+y)+2y) \neq (0,0)$ på γ ty $x+y = x+2y = 0 \Leftrightarrow$ $x = y = 0$ men $(0,0) \notin \gamma$. Alltså gäller för extrempunkter $\operatorname{grad} f = \lambda_0 \operatorname{grad} g$ för något λ_0:

$$\begin{cases} f'_x = \lambda_0 g'_x \\ f'_y = \lambda_0 g'_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lambda_0 2(x+y) \\ \frac{-y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lambda_0 2(x+2y) \end{cases} \underset{\frac{-xy}{2\lambda_0 (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=}{\Longleftrightarrow} xy + y^2 = x^2 + 2xy$$

$[\lambda_0 \neq 0, x \neq 0, y \neq 0$ ty $g(0,0) \neq 0] \iff x^2 + xy = y^2 \iff \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} y^2$.

<u>fall 1</u>: $x = -\frac{y}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} y = \frac{\sqrt{5}-1}{2} y$: Bivillkoret ger $10 = (x+y)^2 + y^2 =$
$= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1\right)^2 y^2 + y^2 = \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4} + 1\right) y^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2} y^2 \implies \underline{y^2} = \frac{20}{5+\sqrt{5}} = \underline{5 - \sqrt{5}}$.
Då är $\underline{x^2} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 y^2 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)(5-\sqrt{5}) = \frac{20-8\sqrt{5}}{2} = \underline{10 - 4\sqrt{5}}$ och
$\underline{f(x,y)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{15-5\sqrt{5}}}}$. $\boxed{\text{OBS } \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi = \text{gyllene snittet !!}}$

<u>fall 2</u>: $x = -\frac{y}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} y = \frac{-\sqrt{5}-1}{2} y$: Bivillkoret ger $10 = (x+y)^2 + y^2 =$
$= \left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2} + 1\right)^2 y^2 + y^2 = \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4} + 1\right) y^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2} y^2 \implies \underline{y^2} = \frac{20}{5-\sqrt{5}} = \underline{5 + \sqrt{5}}$.
Då är $\underline{x^2} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 y^2 = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)(5+\sqrt{5}) = \frac{20+8\sqrt{5}}{2} = \underline{10 + 4\sqrt{5}}$ och
$\underline{f(x,y)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{15+5\sqrt{5}}}}$. Minsta resp. största värde som $|\boldsymbol{E}|$ antar på γ är alltså $m = \frac{1}{\sqrt{15+5\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{2}}{5+\sqrt{5}}$ resp. $M = \frac{1}{\sqrt{15-5\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{2}}{5-\sqrt{5}}$.

Alternativt kan man parametrisera γ: $x = \sqrt{10}(\cos t - \sin t)$, $y = \sqrt{10} \sin t$ och bestämma max/min av $g(t) = \frac{1}{\sqrt{10\left((\cos t - \sin t)^2 + \sin^2 t\right)}} = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{3 - \cos 2t - 2\sin 2t}}$,
$0 \leq t \leq \pi$: $g'(t) = \frac{-(2\sin 2t - 4\cos 2t)}{2\sqrt{5}\sqrt{(3-\cos 2t - 2\sin 2t)^3}} = \frac{-\cos 2t(\tan 2t - 2)}{\sqrt{5}\sqrt{(1-\cos 2t-2\sin 2t)^3}} = 0$ för
$\varphi \in \left\{\frac{\arctan 2}{2}, \frac{\arctan 2 + \pi}{2}\right\}$ ($\cos 2t = 0$ ej lösning!); max/min finns bland
$g(0) = g(\pi) = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $g\left(\frac{\arctan 2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{15-5\sqrt{5}}}$ och $g\left(\frac{\arctan 2+\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{15+5\sqrt{5}}}$
som ovan $\left(\cos(\arctan 2) = \frac{1}{\sqrt{5}},\ \sin(\arctan 2) = \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

ANM: Man kan även bestämma max/min av $x^2 + y^2$, men det förenklar ej.

svar: $\boxed{\left[\frac{\sqrt{2}}{5+\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{2}}{5-\sqrt{5}}\right]}$ Ellipsen (med de punkter i vilka $|\boldsymbol{E}|$ är störst/minst):