Tentamen i flervariabelanalys för F1/TM1 (mve035), 10-08-24

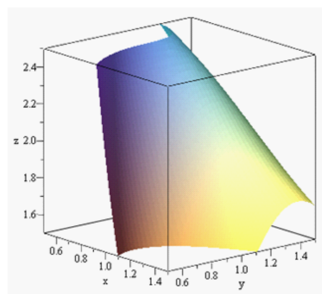
uppg. 1

$F(x,y,z) = x^z + yz + x\sin(\pi y)$ är C^1 i $\Omega = \{(x,y,z) : x > 0, y > 0, z > 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
$\operatorname{grad} F(x,y,z) = \left(zx^{z-1} + \sin(\pi y), z + \pi x\cos(\pi y), x^z \ln x + y\right)$.
Punkten $(1,1,2)$ ligger i Ω och $F(1,1,2) = 3$.

a) Tangentplanet till ytan $F(x,y,z) = 3$ i punkten $(1,1,2)$ har ekvationen
$\operatorname{grad} F(1,1,2) \bullet (x-1, y-1, z-2) = (2, 2-\pi, 1) \bullet (x-1, y-1, z-2) =$
$= 2x - 2 + (2-\pi)y - 2 + \pi + z - 2 = 2x + (2-\pi)y + z + \pi - 6 = 0$.

b) $F'_z(1,1,2) = 1 \neq 0$, implicita funktionssatsen ger att ytan $F(x,y,z) = 3$ lokalt i punkten $(1,1,2)$ ät en (C^1-) funktionsyta.

svar: $\boxed{2x + (2-\pi)y + z = 6 - \pi}$. Så ser ytan $F(1,1,2) = 3$ ut nära $(1,1,2)$:



uppg. 2

Vi bestämmer en karakteristisk koordinat v till differentialekvationen
(DE) $\cosh(x) f'_x - y\sinh(x) f'_y$ genom att lösa $(*)$ $y' = \frac{-y\sinh x}{\cosh x}$:
$(*) \Leftrightarrow \cosh(x) y' + y\sinh(x) = 0 \Leftrightarrow (\cosh(x) y)' = 0 \Leftrightarrow \cosh(x) y = c$.
Vi väljer alltså som nya variabler $\underline{v = \cosh(x) y}$ och $\underline{u = x}$ (t. ex.) och får då:
$\cosh(x) f'_x - y\sinh(x) f'_y = 2y\cosh^3(x)$ blir i $u, v-$planet
$\cosh(x)(1 \cdot f'_u + y\sinh(x) f'_v) - y\sinh(x)(0 \cdot f'_u + \cosh(x) f'_v)) = \cosh(x) f'_u =$
$= 2y\cosh^3(x) \Leftrightarrow f'_u = 2v\cosh u$ med lösningen $f(u,v) = 2\sinh(u) v + g(v)$.

svar: $\boxed{f(x,y) = y\sinh(2x) + g(y\cosh x) \text{ där } g \text{ är en godt. } C^1\text{−funktion}}$

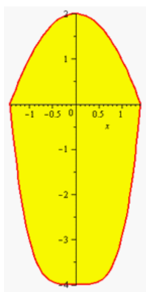
uppg. 3

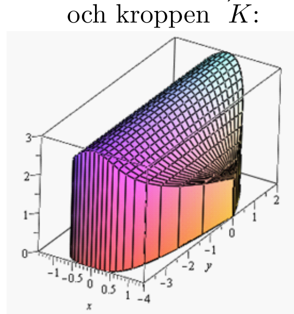
På $D = \left\{(x,y) : x^4 - 4 \leq y \leq 2 - x^2\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ är $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$
(ty $x^4 - 4 \leq 2 - x^2 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 6 = (x^2 - 2)(x^2 + 3) \leq 0 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{2}$)
och $f(x,y) = 3 - x^2 \geq 0$, kroppen $K = \left\{(x,y,z) : (x,y) \in D, 0 \leq z \leq 3 - x^2\right\}$
har då volymen $m(K) = \iint\limits_D \left(\int\limits_0^{3-x^2} dz \right) dxdy = \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int\limits_{x^4-4}^{2-x^2} (3 - x^2)\, dy \right) dx =$

$$= \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(3 - x^2\right)\left(2 - x^2 - x^4 + 4\right) dx = 2\int\limits_{0}^{\sqrt{2}} \left(18 + x^6 - 2x^4 - 9x^2\right) dx =$$

$$= 2\left(18\sqrt{2} + \frac{\left(\sqrt{2}\right)^7}{7} - \frac{2\left(\sqrt{2}\right)^5}{5} - 3\left(\sqrt{2}\right)^3\right) = 8\sqrt{2}\left(3 - 4\cdot\frac{1}{35}\right) = \frac{8\sqrt{2}(105-4)}{35}.$$

området D och kroppen K:





svar: $\boxed{\frac{808\sqrt{2}}{35}}$

uppg. 4

$\mathbb{F}(x,y) = \left(\frac{y^2\left(x^2+y^2\right)^\alpha}{x^2}, -\frac{y\left(x^2+y^2\right)^\alpha}{x}\right) = \left(P(x,y), Q(x,y)\right).$

I halvplanet $x > 0$ är P och Q C^1 och

$Q'_x(x,y) = -y\frac{2\alpha\left(x^2+y^2\right)^{\alpha-1}x^2 - \left(x^2+y^2\right)^\alpha}{x^2} = \frac{y\left(x^2+y^2\right)^{\alpha-1}}{x^2}\left(x^2 + y^2 - 2\alpha x^2\right),$

$P'_y(x,y) = \frac{2y\left(x^2+y^2\right)^{\alpha-1} + \alpha\left(x^2+y^2\right)^{\alpha-1}2y^3}{x^2} = \frac{y\left(x^2+y^2\right)^{\alpha-1}}{x^2}\left(2\left(x^2+y^2\right) + 2\alpha y^2\right),$

alltså $\mathbb{F}$ konservativt i $x > 0 \Leftrightarrow Q'_x(x,y) = P'_y(x,y)$ i $x > 0 \Leftrightarrow [y \neq 0]$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2\alpha x^2 = 2\left(x^2+y^2\right) + 2\alpha y^2 \Leftrightarrow -2\alpha\left(x^2+y^2\right) = x^2 + y^2 \Leftrightarrow$

$[x^2 + y^2 \neq 0] \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}.$

För $\alpha = -\frac{1}{2}$ finns då en potential $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ så att för $x > 0$

$$\begin{cases} \Phi'_x = P(x,y) = \frac{y^2}{x^2\sqrt{x^2+y^2}} \\ \Phi'_y = Q(x,y) = \frac{-y}{x\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \Rightarrow \Phi(x,y) = \frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{x} + g(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi'_x = -\frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{x^2+y^2}}{x^2} + g'(x) = \frac{y^2}{x^2\sqrt{x^2+y^2}} + g'(x) \overset{!}{=} \frac{y^2}{x^2\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow g(x) = c,$$

vi väljer $c = 0$.

svar: $\boxed{\alpha = -\frac{1}{2},\ \Phi(x,y) = \frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{x}}$

uppg.5

$\mathbb{A} = \left(x^2 - y^3\cos z, y^2 + x^3\cos z, \left(x^2 - y^2\right)\cos z\right),$

$Y = \left\{(x,y,z) : 2x^2 + 2y^2 + 3(z-3)^2 = 32, z \geq 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$

a) $\boldsymbol{A}$ är C^1 i $\mathbb{R}^3$, rot $\mathbb{A} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - y^3\cos z & y^2 + x^3\cos z & \left(x^2-y^2\right)\cos z \end{vmatrix} =$

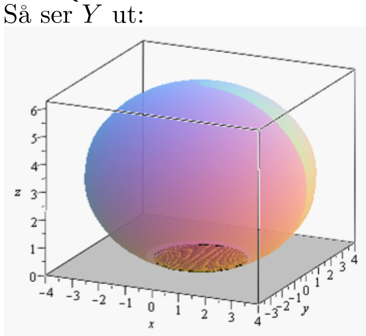
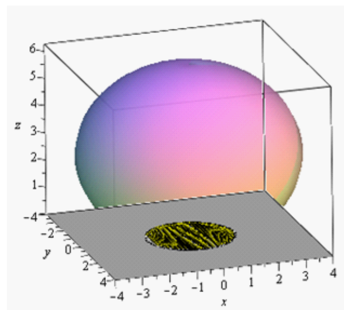
$= \left(-2y\cos z + x^3\sin z, y^3\sin z - 2x\cos z, 3\left(x^2+y^2\right)\cos z\right) \neq (0,0,0)$, alltså har $\mathbb{A}$ ej en potential i $\mathbb{R}^3$.

$\operatorname{div}\mathbb{A} = 2x + 2y + \left(y^2 - x^2\right)\sin z \neq 0$, alltså har $\mathbb{A}$ ej en vektorpotential i $\mathbb{R}^3$.

b) Vi observerar först att $z = 0$ för $2x^2 + 2y^2 + 27 = 32$, dvs. för $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}$ och sätter $D = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \frac{5}{2}\right\}$ och

$K = \left\{(x, y, z) : 2x^2 + 2y^2 + 3\,(z-3)^2 \leq 32,\ z \geq 0\right\}$, då är $\partial K = Y \cup D$.

Så ser Y ut:

Flödet av rot $\boldsymbol{A}$ genom Y bort från origo (= ut ur K) är $F = \iint\limits_{Y} \operatorname{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$.

b1) Med Gauss: $\iint\limits_{\partial K} \operatorname{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS = \iint\limits_{Y} \operatorname{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS + \iint\limits_{D} \operatorname{rot}\boldsymbol{A}\cdot(0,0,-1)\,dxdy =$

$= \iiint\limits_{K} \operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{A})\,dxdydz = 0$ $\left(\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{A}) = 0 \text{ ty } \boldsymbol{A} \text{ är } C^2 \text{ eller räkna ut det}\right)$

allstå är $F = \iint\limits_{D} \operatorname{rot}\boldsymbol{A}\cdot(0,0,1)\,dxdy = \iint\limits_{D} 3\left(x^2+y^2\right)dxdy =$

$= [\text{pol. koord.}] = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\sqrt{\frac{5}{2}}} 3r^3 dr = 2\pi\frac{3}{4}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^4 = \frac{75\pi}{8}$.

b2) Med Stokes:

$F = \iint\limits_{Y} \operatorname{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS = \int\limits_{\partial Y} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = [\partial Y = \partial D \text{ (moturs)},\ z = 0\ (\Rightarrow dz = 0)]$

$= \int\limits_{\partial D} \left(x^2 - y^3\right)dx + \left(y^2 + x^3\right)dy \underset{\text{Green}}{=} \iint\limits_{D} 3\left(x^2+y^2\right)dxdy = \frac{75\pi}{8}$ (s. o.).

Utan Green med $\partial D : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \left(\sqrt{\frac{5}{2}}\cos t, \sqrt{\frac{5}{2}}\sin t\right), 0 \xrightarrow{t} 2\pi$:

$F = \int\limits_{\partial D} \left(x^2 - y^3\right)dx + \left(y^2 + x^3\right)dy =$

$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\left(-\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\cos^2 t + \frac{25}{4}\sin^3 t\right)\sin t + \left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\sin^2 t + \frac{25}{4}\cos^3 t\right)\cos t\right)dt =$

$= \int\limits_0^{2\pi} \left(-\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\cos^2 t\sin t + \frac{25}{4}\left(\sin^4 t + \cos^4 t\right) + \frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\sin^2 t\cos t\right)dt =$

$\left[\sin^4 t + \cos^4 t = \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \cos^2(2t)\right) = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4t}{4}\right]$

$= \left[\frac{5}{6}\sqrt{\frac{5}{2}}\cos^3 t + \frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}\sin^3 t + \frac{75}{16}t + \frac{25}{32}\sin(4t)\right]_0^{2\pi} = \frac{75\pi}{8}$.

ANM: Y kan parametriseras t.ex. som: $Y : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\theta, \varphi) =$

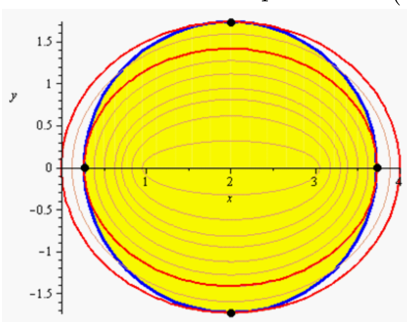
$= \left(4\sin\theta\cos\varphi, 4\sin\theta\sin\varphi, 3 + \frac{8}{\sqrt{6}}\cos\theta\right), 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi - \arctan\frac{\sqrt{10}}{6}$

eller som funktionsytor $Y = Y_+ \cup Y_-$ med $Y_+ : z = 3 + \sqrt{\frac{32-2x^2-2y^2}{3}}$, $x^2 + y^2 \leq 16$

och $Y_- : z = 3 - \sqrt{\frac{32-2x^2-2y^2}{3}}$, $\frac{5}{2} \le x^2 + y^2 \le 16$. **svar**: $\boxed{\frac{75\pi}{8}}$

uppg. 6

Vi skall bestämma det största och det minsta värde som $f(x,y) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$ antar under bivillkoret $g(x,y) = (x-2)^2 + y^2 - 3 = 0$ (dvs. "på cirkeln $\gamma : (x-2)^2 + y^2 = 3$"). γ är kompakt och f är C^0 på γ, alltså antar f på γ ett minsta värde m och ett största M, vidare är γ bågvis sammanhängande, enligt satsen om mellanliggande värden antar då f alla värden mellan m och M och därmed är sökta $V_f = [m, M]$. Enklast hittar man m och M om man studerar nivåkurvorna till f, det är ellipser $f(x,y) = |(x,y) - (1,0)| + |(x,y) - (3,0)| = c$ (alla punkter (x,y) i planet vilkas avstånd till punkterna $(1,0)$ och $(3,0)$ har konstant summa c): eftersom ellipsen och cirkeln har samma mittpunkt så fås minsta och största c i punkterna $\left(2, \pm\sqrt{3}\right)$ och $\left(2 \pm \sqrt{3}, 0\right)$, se figur:



En enkel lösning fås även genom att eliminera y: bivillkoret ger $y^2 = 3 - (x-2)^2$, bestäm nu det största/minsta värdet av $h(x) = \sqrt{(x-1)^2 + 3 - (x-2)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + 3 - (x-2)^2} =$ $= \sqrt{2x} + \sqrt{8-2x}$ för $2 - \sqrt{3} \le x \le 2 + \sqrt{3}$: för inre punkter $0 < 2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$ är $h'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{4-x}} = 0 \iff 4 - x = x$, det ger (enda) stationära punkten $x = 2$, tillsammans med randpunkterna $2 \pm \sqrt{3}$ har vi samma kandidater som ovan.

Vi kan även bestämma kandidaterna för extrempunkter med Lagranges multiplikatormetod: beräkna det största och det minsta värde som $f(x,y)$ antar under bivillkoret $g(x,y) = (x-2)^2 + y^2 - 3 = 0$:
$\operatorname{grad} g(x,y) = (2(x-2), 2y) \ne (0,0)$ på γ ty $(2,0) \notin \gamma$. Alltså gäller för extrempunkter $\operatorname{grad} f = \lambda_0 \operatorname{grad} g$ för något λ_0:

$$\begin{cases} f'_x = \lambda_0 g'_x \\ f'_y = \lambda_0 g'_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} + \frac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}} = \lambda_0 2(x-2) & (1) \\ \frac{y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}} = \lambda_0 2y & (2) \end{cases}$$

<u>fall 1</u>: $y = 0$: Bivillkoret ger kandidaterna $\left(2 \pm \sqrt{3}, 0\right)$.
<u>fall 2</u>: $y \ne 0$: (2) ger $2\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}$ och (1) ger då

$$\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} + \frac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}\right)(x-2) \iff$$

$\iff (x-1)\sqrt{(x-3)^2+y^2}+(x-3)\sqrt{(x-1)^2+y^2}=$
$=\left(\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)(x-2)$
$\iff \sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2} \iff x-3=\pm(x-1)$, alltså $x=2$
och bivillkoret ger kandidaterna $\left(2,\pm\sqrt{3}\right)$. m, M finns bland
$f\left(2+\sqrt{3},0\right)=2\sqrt{3}=f\left(2-\sqrt{3},0\right)$ och $f\left(2,\pm\sqrt{3}\right)=4$, alltså
$m=2\sqrt{3}$ och $M=4$. .

Ytterligare en lösning fås genom att parametrisera
γ: $x=2+\sqrt{3}\cos t$, $y=\sqrt{3}\sin t$ och bestämma max/min av
$g(t)=\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\cos t\right)^2+\sin^2 t}+\sqrt{\left(-1+\sqrt{3}\cos t\right)^2+\sin^2 t}=$
$=\sqrt{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}\cos t}+\sqrt{2-\sqrt{3}\cos t}\right)$, $-\pi\le t\le\pi$:
$g'(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-\sqrt{3}\sin t}{\sqrt{2+\sqrt{3}\cos t}}+\frac{\sqrt{3}\sin t}{\sqrt{2-\sqrt{3}\cos t}}\right)=\frac{\sqrt{3}\sin t}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}\cos t}-\sqrt{2-\sqrt{3}\cos t}}{\sqrt{2+\sqrt{3}\cos t}\sqrt{2-\sqrt{3}\cos t}}\right)=$
$=\frac{3\sqrt{2}\sin t\cos t}{\sqrt{2+\sqrt{3}\cos t}\sqrt{2-\sqrt{3}\cos t}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}\cos t}+\sqrt{2-\sqrt{3}\cos t}\right)}=0$ för $\varphi\in\left\{0,\frac{\pi}{2}\right\}$
(g är jämn); max/min finns bland $g(0)=g(\pi)=2\sqrt{3}$ och $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$.

ANM: Vi har visat: $2\sqrt{3}<|z-1|+|z-3|<4$ då $|z-2|<\sqrt{3}$ $(z\in\mathbb{C})$!

svar: $\boxed{[2\sqrt{3},4]}$