Matematik CTH&GU

Tentamen i flervariabelanalys F1/TM1 (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2011-01-14, kl. 8.30-12.30

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa

Telefon: Ida Säfström, tel. 0703 – 088304

OBS: Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper!
Fyll i omslaget ordentligt!

===

1. Låt $f(x,y,z) = x\sin(z) + z\cos(x) + \cosh(y)\cos(z)$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

a) Visa att xy-planet är tangentplan till nivåytan $f(x,y,z) = 1$ i origo. (3p)

b) Bestäm riktningsderivatan av f i origo i riktningen $(1,1,1)$. (2p)

c) Är avbildningen $(x,y,z) \mapsto \text{grad} f(x,y,z)$ bijektiv lokalt i origo? (3p)

2. Låt $f(x,y) = 1 - |xy|\sqrt{3 + x^2 + y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ och $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$.

a) För vilka $a \in \mathbb{R}$ är f differentierbar i $(a,0)$? (5p)

b) Visa att $f(x,y) \ge 0$ för $(x,y) \in D$. (5p)

c) Beräkna volymen av kroppen $K = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ 0 \le z \le f(x,y)\}$. (5p)

3. Låt $f(x,y) = \frac{x}{(x^2+y^2+1)^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Bestäm V_f. (6p)

b) Beräkna $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ där $D = \{(x,y) : x \ge 0,\ y \ge 0\}$. (6p)

4. Låt $C_1 : y = 2\sinh(1)\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)$, $-1 \xrightarrow{x} 1$, $C_2 : y = x\sinh(x)$, $1 \xrightarrow{x} -1$ och

$\mathbb{F}(x,y) = (xy^3,\ x^2y^2)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Beräkna $\int_{C_1} \mathbb{F} \bullet d\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \mathbb{F} \bullet d\boldsymbol{r}$. (5p)

5. Låt $\mathbb{F} = (-x - z,\ x - y,\ 2z)$ och $Y : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = (u - v,\ u + v^2,\ u^2 + v)$, $-1 \le u \le 1, 0 \le v \le 1$.

a) Har $\mathbb{F}$ en potential i $\mathbb{R}^3$? Har $\mathbb{F}$ en vektorpotential i $\mathbb{R}^3$? (2p)

b) Beräkna flödet av $\mathbb{F}$ genom ytan Y uppåt (dvs. i positiva z-axelns riktning). (6p)

6. Visa att under vissa förutsättningar (ange vilka) gäller att ett fält $\mathbb{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som är konservativt i $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ är virvelfritt i Ω. (4p)

7. Formulera och bevisa Gauss sats. (8p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB