Tentamen i flervariabelanalys för F1 (mve035), 10-01-14

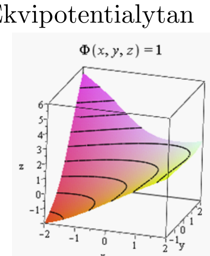
uppg. 1

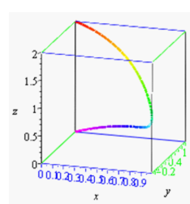
$\Phi(x,y,z) = \cosh(x-y) + \sinh(y-z) + x - z$ är C^1, $\mathbb{F}(x,y,z) = \operatorname{grad}\Phi(x,y,z) =$
$= (\sinh(x-y)+1, -\sinh(x-y)+\cosh(y-z), -\cosh(y-z)-1)$.

a) $\Phi(a,a,a) = 1$, $\Phi'_z(a,a,a) = -2 \neq 0$, implicita funktionssatsen ger då att det finns en omgivning till (a,a,a) där nivåytan $\Phi(x,y,z) = 1$ är en funktionsyta $z = f(x,y)$, f är C^1 och $f(a,a) = a$; f'_y fås genom att derivera $\Phi(x,y,f(x,y))$ med avseende på y: kedjeregeln ger
$\Phi'_x \cdot 0 + \Phi'_y \cdot 1 + \Phi'_z \cdot f'_y = 0$, det ger $f'_y(a,a) = -\frac{\Phi'_y(a,a,a)}{\Phi'_z(a,a,a)} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$.

b) $\operatorname{div}\mathbb{F}(x,y,z) = \Phi''_{xx} + \Phi''_{yy} + \Phi''_{zz} =$
$= (\sinh(x-y)+1)'_x + (-\sinh(x-y)+\cosh(y-z))'_y + (-\cosh(y-z)-1)'_z =$
$= 2(\cosh(x-y)+\sinh(y-z)) \not\equiv 0 \Rightarrow \mathbb{F}$ är <u>inte</u> ett rotationsfält i $\mathbb{R}^3$.

c) $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \left(\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right), \cos(\pi t), t\right) : 0 \xrightarrow{t} 2$ är en C^1-kurva
från $\boldsymbol{r}(0)$ till $\boldsymbol{r}(2)$, alltså är $\int\limits_C \mathbb{F} \bullet d\boldsymbol{r} = \int\limits_0^2 \operatorname{grad}\Phi(\boldsymbol{r}(t)) \bullet \boldsymbol{r}'(t)\,dt =$
$= \int\limits_0^2 \frac{d}{dt}\Phi(\boldsymbol{r}(t))\,dt = \Phi(\boldsymbol{r}(2)) - \Phi(\boldsymbol{r}(0)) = \Phi(0,1,2) - \Phi(0,1,0) =$
$= \cosh 1 - \sinh 1 - 2 - (\cosh 1 + \sinh 1) = -2 - 2\sinh 1$.
Ekvipotentialytan $\Phi(x,y,z) = 1$ och kurvan C:

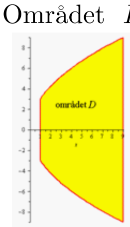


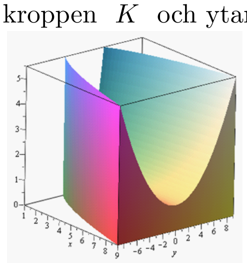


svar: $\boxed{\textbf{a) } \frac{1}{2} \quad \textbf{b) } \text{nej} \quad \textbf{c) } -2-2\sinh 1}$

uppg. 2

$f(x,y) = 1 + \frac{y^2}{2x}$, $D = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 9, -3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x}\}$.
Området D, kroppen K och ytan Y:





Volymen av $K=\{(x,y,z):(x,y)\in D, 0\le z\le f(x)\}$ är $\underline{m(K)}=$

$$=\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_1^9\left(\int_{-3\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}}\left(1+\frac{y^2}{2x}\right)dy\right)dx=\int_1^9\left(2\left[y+\frac{y^3}{6x}\right]_0^{3\sqrt{x}}\right)dx=$$

$$=2\int_1^9\left(3\sqrt{x}+\frac{9}{2}\sqrt{x}\right)dx=2\left[5x^{\frac{3}{2}}\right]_1^9=10\,(27-1)=\underline{260}.$$

Arean av $Y=\{(x,y,z):(x,y)\in D, z=f(x)\}$ är $\underline{m(Y)}=$

$$=\iint_D\sqrt{1+\left(f'_x(x,y)\right)^2+\left(f'_y(x,y)\right)^2}dxdy=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{-y^2}{2x^2}\right)^2+\left(\frac{2y}{2x}\right)^2}dxdy=$$

$$=\iint_D\sqrt{1+\frac{y^4}{4x^4}+\frac{y^2}{x^2}}dxdy=\int_1^9\left(\int_{-3\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}}\left(1+\frac{y^2}{2x^2}\right)dy\right)dx=\int_1^9\left(2\left[y+\frac{y^3}{6x^2}\right]_0^{3\sqrt{x}}\right)dx=$$

$$=2\int_1^9\left(3x^{\frac{1}{2}}+\frac{9}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=2\left[2x^{\frac{3}{2}}+9x^{\frac{1}{2}}\right]_1^9=2\,(54+27-2-9)=\underline{140}.$$

svar: $\boxed{m(K)=260,\ \ m(Y)=140}$

uppg. 3

$\Omega=\left\{(x,y,z):(x,y)\in\mathbb{R}^2, 0\le z\le\frac{1}{1+(x+y)^2}\right\}$; sätt $f(x,y,z)=\frac{e^{-(x-y)^2}}{\sqrt{\left(1+(x+y)^2\right)z}}$.

Ω är obegränsad, $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz$ är generaliserad, även i origo, $f>0$;

vi väljer som uttömmande följd för Ω och f med $D_n:|x|+|y|\le n$

$\Omega_n=\left\{(x,y,z):(x,y)\in D_n, \frac{1}{n}\le z\le\frac{1}{1+(x+y)^2}\right\}$ $(n\in\mathbb{N})$ och beräknar

$$\iiint_{\Omega_n} f(x,y,z)\,dxdydz=\iint_{D_n}\frac{e^{-(x-y)^2}}{\sqrt{\left(1+(x+y)^2\right)}}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{1+(x+y)^2}}\frac{1}{\sqrt{z}}dz\right)dxdy=$$

$$=\iint_{D_n}\frac{e^{-(x-y)^2}}{\sqrt{\left(1+(x+y)^2\right)}}\left(2\left(\sqrt{\frac{1}{1+(x+y)^2}}-\sqrt{\frac{1}{n}}\right)\right)dxdy=$$

$$=\iint_{D_n}e^{-(x-y)^2}\left(2\left(\frac{1}{1+(x+y)^2}-\sqrt{\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{1}{1+(x+y)^2}}\right)\right)dxdy=$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{substituera: } x-y=u,\ \ x+y=v,\ \ \text{då blir}\\ D'_n:\left\{\begin{array}{l}-n\le u\le n\\ -n\le v\le n\end{array}\right.,\ \dfrac{d(u,v)}{d(x,y)}=\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=2\end{array}\right]$$

$$=\int_{-n}^{n}\int_{-n}^{n}e^{-u^2}2\left(\frac{1}{1+v^2}-\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{1+v^2}}\right)\left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right|dudv=[\text{"jämn"}]$$

$$=\int_{-n}^{n}e^{-u^2}2\left[\arctan v-\frac{\ln\left(v+\sqrt{v^2+1}\right)}{\sqrt{n}}\right]_0^n du=4\left(\arctan n-\frac{\ln\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n}}\right)\int_0^n e^{-u^2}du,$$

alltså blir $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz=\lim_{n\to\infty}\iiint_{\Omega_n}f(x,y,z)\,dxdydz=$

$$\left[\frac{\ln\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n}}=\frac{\ln n}{\sqrt{n}}+\frac{\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}{\sqrt{n}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\right]=(\pi-0)\lim_{n\to\infty}2\int_0^n e^{-u^2}du=\pi\sqrt{\pi}.$$

svar: $\boxed{\pi\sqrt{\pi}}$

uppg. 4

$\boldsymbol{v} = (-xz, yz, xy)$ är C^1 i $\mathbb{R}^3$.

a) $\dfrac{d\boldsymbol{v}}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} -z & 0 & -x \\ 0 & z & y \\ y & x & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{i } (1,1,1)}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$

$= 2 \neq 0$, inversa funktionssatsen ger att $\boldsymbol{v}$ är bijektivt lokalt i $(1,1,1)$.

rot $\boldsymbol{v} = (x-y, -x-y, 0) \neq (0,0,0)$, det ger att $\boldsymbol{v}$ inte är konservativt.

b) Låt $D : x^2+y^2 \le 1$ och $f(x,y) = \sqrt{1-x^2+y^2}$. $D \subseteq D_f$ ty

$1-x^2+y^2 \ge x^2+y^2-x^2+y^2 \ge 0$.

Flödet ut ur kroppen $K = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, 0 \le z \le f(x,y)\}$

med utåtriktat enhetsnormalfält $\boldsymbol{n}$ är

$$F = \iint_{\partial K} \boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{n} dS = \underbrace{\iint_{Y} \boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{n} dS}_{\text{sökta flödet } F} + \underbrace{\iint_{D} \boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{n} dS}_{\boldsymbol{n}=(0,0,-1)} + \underbrace{\iint_{\tilde{Y}} \boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{n} dS}_{\tilde{Y}: z=f(x,y), \boldsymbol{n} \| \left(-f'_x, -f'_y, 1\right)} =$$

$$= F + \iint_D (0,0,xy) \bullet (0,0,-1)\, dxdy +$$

$$\iint_D \left(-x\sqrt{1-x^2+y^2}, y\sqrt{1-x^2+y^2}, xy\right) \bullet \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{1-x^2+y^2}}, 1\right) dxdy =$$

$$= F + \iint_D \left(-xy - x^2 - y^2 + xy\right) dxdy = F - \iint_D \left(x^2+y^2\right) dxdy =$$

$$= \iiint_K \operatorname{div} \boldsymbol{v} dxdydz = \iiint_K (-z+z+0)\, dxdydz = 0, \text{ alltså är}$$

$$\underline{F} = \iint_D \left(x^2+y^2\right) dxdy = [\text{polära koordinater}] = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3 dr d\varphi = 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \underline{\frac{\pi}{2}}.$$

Obs: $\boldsymbol{n}$ för ytan $\tilde{Y}$ är inte C^0 i $\pm(1,0)$ (en nollmängd), men $\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{n}$ är C^0.

Alternativt kan flödet beräknas direkt genom att parametrisera ytan Y

t. ex. så här: $Y : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\varphi, t) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi), t)$, $(\varphi, t) \in \Omega =$

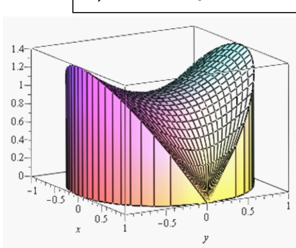
$= \left\{(\varphi, t) : -\pi \le \varphi \le \pi,\ 0 \le t \le \sqrt{2\sin^2\varphi}\right\}$: $\boldsymbol{r}'_\varphi \times \boldsymbol{r}'_t = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ och

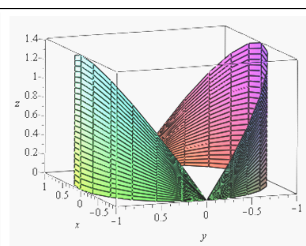
$$F = \iint_\Omega (-t\cos\varphi, t\sin\varphi, \sin\varphi\cos\varphi) \bullet (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)\, d\varphi dt =$$

$$= \iint_\Omega \left(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right) t d\varphi dt = \int_{-\pi}^{\pi} (-\cos(2\varphi)) \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2\sin^2\varphi}} d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} (-\cos(2\varphi)(1-\cos(2\varphi)))\, d\varphi = \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos(4\varphi)}{2} - \cos(2\varphi)\right) d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

svar: $\boxed{\textbf{a) } \boldsymbol{v} \text{ är bijektivt lokalt i } (1,1,1) \text{, ej konservativt} \quad \textbf{b) } \frac{\pi}{2}}$





uppg. 5

Sätt $f(x,y,z) = x+y+z$ och $g(x,y,z) = xyz-1$ med $D_g = D_f = \{(x,y,z)\,; x>0, y>0, z>0\}$; f och g är C^1.Vi skall visa att f antar det minsta värdet 3 under bivillkoret $g(x,y,z)=0$, dvs. då (x,y,z) ligger på nivåyten $g(x,y,z)=0$ (på funktionsytan $Y: z=\frac{1}{xy},\ x>0,\ y>0$).

ANM.: lösningen visar att $f(x,y,z) > 3 = f(1,1,1)$ för $(x,y,z) \neq (1,1,1)$. Det ger ett bevis för "$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$ med likhet endast för $x=y=z$" (hur?)!

Lösning 1: eliminera $z=\frac{1}{xy}$:

Bestäm det minsta värde som $h(x,y) = x+y+\frac{1}{xy}$ antar då $x>0, y>0$:

Stationära punkter: $\begin{cases} h'_x(x,y) = 1-\frac{1}{x^2y} = 0 \\ h'_y(x,y) = 1-\frac{1}{xy^2} = 0 \end{cases} \implies x^2y - xy^2 = xy(x-y) =$ $= 0 \underset{xy\neq 0}{\implies} x=y \implies x^3 = 1 \implies (1,1)$ är den enda stationära punkten, $h(1,1)=3$. På $D = \left\{(x,y)\,; \frac{1}{9} \leq x \leq 3, \frac{1}{9} \leq y \leq 3\right\}$ antar h ett största och ett minsta värde ty h är kontinuerlig och D är kompakt, antingen i en inre punkt (enda möjliga är $(1,1)$), eller i en randpunkt:

rand 1: $x=\frac{1}{9}, \frac{1}{9} \leq y \leq 3$: $h(\frac{1}{9},y) = \frac{1}{9}+y+\frac{9}{y} \geq \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{9}{3} > 3$

rand 2: $x=3, \frac{1}{9} \leq y \leq 3$: $h(3,y) = 3+y+\frac{1}{3y} > 3$. Eftersom $h(x,y)=h(y,x)$ så gäller $h(x,y)>3$ för alla $(x,y) \in \partial D$, alltså är 3 det minsta värde som h antar på D. Utanför D är $h(x,y) = x+y+\frac{1}{xy} > 3$: klart om $x>3$ eller $y>3$ och om $x<\frac{1}{9}$ och $y<\frac{1}{9}$; om $x<\frac{1}{9}$ och $\frac{1}{9}<y<3$ (eller $y<\frac{1}{9}$ och $\frac{1}{9}<x<3$) så är $h\left(\frac{1}{9},y\right) = \frac{1}{9}+y+\frac{9}{y} > 3$ ($h\left(x,\frac{1}{9}\right) = x+\frac{1}{9}+\frac{9}{x} > 3$) s.o. ($h$ antar ej ett största värde ty t.ex $h(a,a) = 2a+\frac{1}{a^2} \to \infty$ då $a\to\infty$).

Lösning 2: med Lagrange:

$\text{grad}g(x,y,z) = (yz,xz,xy) \neq (0,0,0)$, alltså löser extrempunkter $\text{grad}f = \lambda\,\text{grad}g$, dvs. det finns λ_0 så att

$$\begin{cases} f'_x = \lambda_0 g'_x \\ f'_y = \lambda_0 g'_y \\ f'_z = \lambda_0 g'_z \end{cases} : \begin{cases} 1 = \lambda_0 yz \\ 1 = \lambda_0 xz \\ 1 = \lambda_0 xy \end{cases} \implies (\lambda_0 xyz =)\ x=y=z \underset{\text{bivillkoret}}{\implies} x^3 = 1, \text{ alltså:}$$

enda kandidaten är $(1,1,1)$ (inre punkt i D_f).

För att visa att f antar i $(1,1,1)$ sitt minsta värde argumenterar vi som ovan: På den kompakta mängden $\left\{(x,y,z)\,; (x,y)\in D,\ z=\frac{1}{xy}\right\}$ (Y är sluten ty $\frac{1}{xy}$ är kontinuerlig) antar f ett största och ett minsta värde, enda inre punkten i $\{(x,y,z)\,; (x,y)\in D,\ 0<z\}$ är $(1,1,1)$ med $f(1,1,1)=3$; i punkter (x,y,z) med $(x,y)\in\partial D$, dvs. $\left(\frac{1}{9},y,\frac{9}{y}\right)$, $\left(x,\frac{1}{9},\frac{9}{x}\right)$, $\left(3,y,\frac{1}{3y}\right)$ och $\left(x,3,\frac{1}{3x}\right)$, är $f(x,y,z)>3$ (s.o.), alltså antar f i $(1,1,1)$ ett strängt minimum $f(1,1,1)=3$, dvs. vi har visat $f(x,y,z)\geq 3$ för alla $(x,y,z)\in D_f$ (och $f(x,y,z)=3$ endast för $(x,y,z)=(1,1,1)$).