Tentamen i Flervariabelanalys F/TM, MVE035

2011 03 17 kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.

Telefon: Urban Larsson, tel 070-3088304

För godkänt krävs minst 24 poäng.

Betyg 3: 24-35 poäng, betyg 4: 36-47 poäng, betyg 5: 48 poäng eller mera. Bonuspoäng från 2011 ingår.

Lösningar samt uppgifter om granskning av rättade tentor kommer på kursens hemsida:

http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve035/1011

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

---

1. (a) Bestäm tangentplanet till ytan $z = 4 + 2x^2y - y^3$ i punkten $(-1, 1, 5)$. (3p)

   (b) Vilken typ av stationär punkt har funktionen $f(x, y) = 2 + x^2 + 4xy + y^2 + 5x^2y - 3xy^3$ i origo? Motivera! (3p)

   (c) Ytan $\cos x \sin y \cos z + \sin x \cos y \sin z + \cos x \cos y \cos z = 1$ definierar en av variablerna som en funktion av de två andra lokalt kring origo. Vilken av dem är funktion av de andra? Motivera! (3p)

   (d) Visa att kraftfältet $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (y \sin yz, 1 + x \sin yz + xyz \cos yz, xy^2 \cos yz)$ har en potential och beräkna det arbete $\boldsymbol{F}$ uträttar på en partikel som förflyttas längs en rät linje från $(1, \pi, \frac{1}{2})$ till $(\frac{1}{2}, 1, \pi)$. (4p)

2. Beräkna massan av kroppen $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$ vars densitet ges av funktionen $\rho(x, y, z) = \dfrac{z}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$. (7p)

3. (a) Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_\gamma (e^{x+y} - y)dx + (e^{x+y} - 1)dy$, där γ är den halvcirkel som går genom första kvadranten från origo till punkten $(1, 0)$. (7p)

   (b) Använd Stokes sats för att beräkna $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$, där $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x^2y, \frac{x^3}{3}, xy)$ och där C är skärningskurvan mellan cylindern $x^2 + y^2 = 1$ och ytan $z = y^2 - x^2$ orienterad moturs sedd ”uppifrån”. (7p)

4. Temperaturen i området $D = \{(x, y, z) : 4x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 16\}$ ges av funktionen $T(x, y, z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 50$. I vilken punkt i området D är temperaturen *lägst*? (7p)

5. Två räta cirkulära cylindrar har båda radien 1. Cylindrarnas axlar skär varandra under rät vinkel. (6p)

   (a) Beräkna volymen av snittet mellan cylindrarna.

   (b) Beräkna arean av den yta som begränsar cylindrarnas snitt.

6. Bevisa att varje reellvärd $\mathcal{C}^1$-funktion av två variabler är differentierbar. (7p)

7. (a) Formulera Gauss sats. (3p)

   (b) Härled formeln (3p)

$$\iiint_D (\nabla f \cdot \nabla g + f \Delta g)\ dxdydz = \iint_{\partial D} f \nabla g \cdot \boldsymbol{N}\ dS$$

   under följande förutsättningar: f och g är $\mathcal{C}^2$-funktioner, D, ∂D och $\boldsymbol{N}$ är som i Gauss sats. Symbolen Δ står för Laplaceoperatorn $\nabla \cdot \nabla$.

Lycka till!/LF