Lösningar till tentan MVE035 2011-03-17

---

1. (a) **Metod I**: Tangentplanet ges av ekvationen
$z = f(-1,1) + f'_x(-1,1)(x+1) + f'_y(-1,1)(y-1)$
där $f(x,y) = 4 + 2x^2y - y^3$ och därmed $f(-1,1) = 5,\ f'_x(-1,1) = -4,\ f'_y(-1,1) = -1$.
Metod II: Ytan uppfattas som nivåytan $g(x,y,z) = 4$ till funktionen $g(x,y,z) = z - 2x^2y + y^3$, varvid $\nabla g(-1,1,5)$ är normalvektor till det sökta tangentplanet. Planets ekvation blir då
$\nabla g(-1,1,5) \cdot (x+1, y-1, z-5) = 0$.
Tangentplanets ekvation är $4(x+1) + (y-1) + (z-5) = 0$, eller på vanlig normalform $\underline{\mathbf{4x + y + z = 2}}$.

(b) Den kvadratiska formen i Taylorutvecklingen av $f(x,y)$ i origo kan utläsas direkt ur funktionsuttrycket: $Q(x,y) = x^2 + 4xy + y^2$. Efter kvadratkomplettering får vi $Q(x,y) = (x+2y)^2 - 3y^2$, som är *indefinit* ($Q(1,0) > 0,\ Q(-2,1) < 0$). Då vet vi att $(0,0)$ är en **sadelpunkt**.

(c) Ytan är en nivåyta till funktionen $f(x,y,z) = \cos x \sin y \cos z + \sin x \cos y \sin z + \cos x \cos y \cos z$. Vi kontrollerar de partiella derivatorna i origo: $f'_x(0,0,0) = 0,\ f'_y(0,0,0) = 1,\ f'_z(0,0,0) = 0$. Enligt implicita funktionssatsen innebär $f'_y(0,0,0) \neq 0$ att ***y* lokalt är en $\mathcal{C}^1$-funktion av *x* och *z***.
(Även x eller z skulle möjligen kunna uttryckas lokalt som funktion av de övriga, men implicita funktionssatsen lovar ingenting! Här räcker det dock att ange en variabel som med visshet är en funktion av de övriga.)

(d) Vi söker en potential, dvs en $\mathcal{C}^1$-funktion U som uppfyller $\nabla U = \boldsymbol{F}$.
$U'_x = y \sin yz \ \Rightarrow\ U(x,y,z) = xy \sin yz + g(y,z)$
$U'_y = 1 + x \sin yz + xyz \cos yz \ \Rightarrow\ g'_y(y,z) = 1 \ \Rightarrow\ g(y,z) = y + h(z)$
$U'_z = xy^2 \cos yz \ \Rightarrow\ h'(z) = 0$, vi kan välja $h(z) = 0$.
Alltså: **en potential är** $U(x,y,z) = xy \sin yz + y$.
Vi kan nu beräkna arbetet som en potentialdifferens: $W = U(\frac{1}{2}, 1, \pi) - U(1, \pi, \frac{1}{2}) = \underline{\mathbf{1 - 2\pi}}$.

2. Vi byter till rymdpolära koordinater $(x,y,z) = (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta)$ med Jacobianen $J = r^2 \sin\theta$. Området K avbildas då på $K' = \{(r,\theta,\phi) : 0 \leq r \leq \sqrt{2},\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \phi \leq \pi\}$. Massan blir

$$m = \iint_K \rho(x,y,z)\, dxdydz = \iint_K \frac{z}{1+x^2+y^2+z^2}\ dxdydz = \iint_{K'} \frac{r\cos\theta}{1+r^2} r^2 \sin\theta\ drd\theta d\phi =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{r^3}{1+r^2}\, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta\, d\theta \int_0^{\pi} 1\, d\phi = \int_0^{\sqrt{2}} (r - \frac{r}{1+r^2})\, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta}(\sin\theta)^2\, d\theta \int_0^{\pi} 1\, d\phi =$$

$$= \left[\frac{r^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+r^2)\right]_0^{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2}(\sin\theta)^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \pi = \underline{\boldsymbol{\tfrac{\pi}{4}(2 - \ln 3)}}$$

3. (a) Med D = halvcirkelskivan med medelpunkt i $(\frac{1}{2}, 0)$ och radie $\frac{1}{2}$, med ∂D positivt orienterad och med L = x-axeln från origo till $(1,0)$ så blir $\partial D = -\gamma + L$. Det integrerade fältet är $\mathcal{C}^1$ i hela planet, så vi kan använda Greens formel:

$$\int_{\partial D} (e^{x+y} - y)\, dx + (e^{x+y} - 1)\, dy = \iint_D (\frac{\partial}{\partial x}(e^{x+y} - 1) - \frac{\partial}{\partial y}(e^{x+y} - y))\, dxdy = \iint_D 1\ dxdy = area(D) = \frac{\pi}{8}$$

Samtidigt är

$$\int_{\partial D} (e^{x+y} - y)\, dx + (e^{x+y} - 1)\, dy = -\int_\gamma (e^{x+y} - y)\, dx + (e^{x+y} - 1)\, dy + \int_L (e^{x+y} - y)\, dx + (e^{x+y} - 1)\, dy$$

så

$$\int_\gamma (e^{x+y} - y)\, dx + (e^{x+y} - 1)\, dy = \int_L (e^{x+y} - y)\, dx + (e^{x+y} - 1)\, dy - \frac{\pi}{8} = \int_0^1 e^x\, dx - \frac{\pi}{8} = \underline{\boldsymbol{e - 1 - \tfrac{\pi}{8}}}$$

(b) Fältet $\boldsymbol{F}$ är $\mathcal{C}^1$ överallt, ytan $Y : \boldsymbol{r}(x,y) = (x, y, y^2 - x^2)$ där $(x,y) \in D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ och dess rand C är $\mathcal{C}^1$. Med C orienterad enligt beskrivningen och Y med normal ”uppåt” ger då Stokes sats:

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_Y rot\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N}\, dS = \iint_D \nabla \times (x^2 y, \frac{x^3}{3}, xy) \cdot (\boldsymbol{r}'_x \times \boldsymbol{r}'_y)\, dxdy = \iint_D (x, -y, 0) \cdot (2x, -2y, 1)\, dxdy =$$

$$= \iint_D 2(x^2 + y^2)\, dxdy = \text{(polära koordinater)} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 2r^2 \cdot r\, dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \underline{\boldsymbol{\pi}}$$

4. Området D är kompakt (begränsat av en ellipsoid), funktionen T är kontinuerlig. Därmed garanteras existensen av både största och minsta värde av T på D av en sats. Dessa värden kan antas i stationära punkter i det inre av D (T har partiella derivator överallt) eller så antas de på randen av D.

   Vi undersöker T:s stationära punkter. Eftersom $\nabla T(x,y,z) = (16x, 4z, 4y-16)$ så ser vi att enda stationära punkten $(0,4,0)$ tillhör randen av D.

   Återstår en undersökning av ∂D. Vi söker då minimum av T under bivillkoret $g(x,y,z) = 4x^2+y^2+4z^2-16 = 0$. ∂D är också är en kompakt mängd, så även här finns det vi söker p g a ovannämnda sats. Varje punkt av $\partial D = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = 0\}$ är en inre punkt till $D_T \cap D_g$ och $\nabla g \neq \mathbf{0}$ på hela ∂D vilket innebär att minimipunkten är en lösning till systemet

$$\begin{cases} \nabla T = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 16x &= \lambda 8x \\ 4z &= \lambda 2y \\ 4y-16 &= \lambda 8z \\ 4x^2+y^2+4z^2 &= 16 \end{cases}$$

   Vi ser att första ekvationen ger två fall: $\lambda = 2$ eller $x = 0$. Vi testar vad detta ger i de övriga ekvationerna.

   Fallet $\lambda = 2$:

$$\begin{cases} 4z &= 4y \\ 4y-16 &= 16z \\ 4x^2+y^2+4z^2 &= 16 \end{cases}$$

   som ger $z = y = -\frac{4}{3}$ och $x = \pm\frac{4}{3}$, alltså punkterna $(\pm\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$.

   Fallet $x = 0$:

$$\begin{cases} 4z &= 2\lambda y \\ 4y-16 &= 8\lambda z \\ y^2+4z^2 &= 16 \end{cases}$$

   De två första ekvationerna ger $4z^2 = y(y-4)$ (multiplicera med z respektive y), vilket insatt i den tredje ger $y^2-2y = 8$ med lösningarna $y = 4,\ y = -2$. Detta ger oss punkterna $(0,4,0)$ och $(0,-2,\pm\sqrt{3})$.
   Vi jämför nu funktionsvärdena i alla de punkter som är lösningar till vårt system:
   $T(0,4,0) = 50$
   $T(\pm\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}) = \frac{384}{9} + 50 > 50$
   $T(0,-2,-\sqrt{3}) = 50 + 24\sqrt{3} > 50$
   $T(0,-2,\sqrt{3}) = 50 - 24\sqrt{3} < 50$.
   Tydligen är temperaturen **lägst i punkten $(0,-2,\sqrt{3})$**.

   Variant: Undersökningen på randen kan också göras genom att man substituerar $x = x(y,z)$ (egentligen substituerar man x^2) ur ellipsoidens ekvation och sedan undersöker $T_1(y,z) = T(x(y,z),y,z)$ i området $y^2+4z^2 \leq 16$.

5. Om vi väljer cylinderaxlarna som z-axeln respektive x-axeln så har vi

   Cylinder I: $x^2+y^2 = 1$
   Cylinder II: $y^2+z^2 = 1$

   Om vi "tittar in" i cylinder I uppifrån så ser vi närmaste begränsningsytan som utgörs av den del av cylinder II som ligger inom enhetscirkeln, dvs man ser ytan $z = \sqrt{1-y^2}$ i området $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$. Från motsatta hållet ser vi ytan $z = -\sqrt{1-y^2}$ inom D.

   (a) Volymen V är området mellan de nämnda ytorna, dvs (om vi låter bli polära koordinater!)

$$V = \iint_D (\sqrt{1-y^2} - (-\sqrt{1-y^2}))\,dxdy = \int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 2\sqrt{1-y^2}\,dx = \int_{-1}^{1} 4(1-y^2)\,dy = \underline{\underline{\mathbf{\tfrac{16}{3}}}}$$

   (b) Arean A består av fyra kongruenta ytor, av vilka en ges av $\boldsymbol{r}(x,y) = (x,y,\sqrt{1-y^2}),\ x^2+y^2 \leq 1$. Vi får

$$|\boldsymbol{r}'_x \times \boldsymbol{r}'_y| = |(0, \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, 1)| = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

   Arean blir

$$A = 4\iint_D |\boldsymbol{r}'_x \times \boldsymbol{r}'_y|\,dxdy = \text{(generaliserad, skär av y-intervallet i ändarna)} = \lim_{n\to\infty} 4\iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dxdy =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 4\int_{-1+\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dx = \lim_{n\to\infty} 4\int_{-1+\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} 2\,dy = \lim_{n\to\infty} 8(2-\frac{2}{n}) = \underline{\underline{\mathbf{16}}}$$

   Med en annan parametrisering kan man undvika generaliserad integral, men räkningarna blir enkla med x och y.

7b . Kort utan detaljer: man använder Gauss sats på ytintegralen av $\boldsymbol{F} = f\nabla g \cdot \boldsymbol{N}$, som då blir lika med trippelintegralen av $div(f\nabla g)$ som beräknas och visar sig vara $\nabla f \cdot \nabla g + f\Delta g$.