Tentamen i Flervariabelanalys F/TM, MVE035

2011 08 23 kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.

Telefon: Oskar Hamlet tel 0703-088304

För godkänt krävs minst 24 poäng.

Betyg 3: 24-35 poäng, betyg 4: 36-47 poäng, betyg 5: 48 poäng eller mera. Bonuspoäng från 2011 ingår.

Lösningar samt uppgifter om granskning av rättade tentor kommer på kursens hemsida:

http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve035/1011

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

---

1. (a) Funktionen $f(x, y) = x^2y^3 + (y-1)^2$ har en enda stationär punkt. Hitta den och bestäm dess karaktär: lokalt maximum, lokalt minimum eller sadelpunkt. (4p)

   (b) Temperaturen i ett område beskrivs av funktionen $T(x, y, z) = 2x^2 + yz - 4z + 10$. Bestäm temperaturens förändring per längdenhet då man i punkten $(1, 2, 2)$ rör sig i riktningen $\boldsymbol{v} = (1, 2, -2)$. (3p)

   (c) Bestäm en potential till vektorfältet $\boldsymbol{F} = (4x^3y + e^y, x^4 + xe^y - 2y)$ och beräkna kurvintegralen $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ där C är kurvan $y = \sqrt{x^2+1}$ från $(0, 1)$ till $(1, \sqrt{2})$. (4p)

2. Beräkna koordinaterna för tyngdpunkten av den del av enhetsklotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ som har alla koordinater positiva. Massfördelningen antas vara homogen. (7p)

3. (a) Beräkna $\iint_D \ln(|x| + |y|)\, dxdy$ där $D = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$. (7p)

   (b) Beräkna $\iint_D (2x^2+y)\, dxdy$ där $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \min(\frac{1}{x}, x^2+1)\}$. (7p)

4. Hastighetsvektorn i en gasströmning är $\boldsymbol{v} = (ye^{-z}, xe^z, x + z)$ och dess masstäthet är $\rho(x, y, z) = z$. Då är vektorfältet $\boldsymbol{F} = \rho\boldsymbol{v}$ flödet av massa per tidsenhet och areaenhet.

   (a) Beräkna massflödet (massa per tidsenhet) som strömmar ut genom det område som begränsas av konen $z = \sqrt{x^2+y^2}$ och planet $z = 1$. (5p)

   (b) Hur stort är flödet genom bara den konformade delen av begränsningsytan? (2p)

5. Bland alla tangentplan till ytan $xy^2z^2 = 1$, bestäm det eller de som har störst avstånd till origo. (7p)

6. Formulera och bevisa Greens formel. (7p)

7. (a) Formulera Stokes sats. (3p)

   (b) Bevisa att $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$ (4p)

Lycka till!/LF