Lösningar till tentan 2011 08 23

1. (a) För stationär(a) punkt(er) löser vi ekvationssystemet $\nabla f = \mathbf{0}$:

$$\begin{cases} 2xy^3 &= 0 \\ 3x^2y^2 + 2(y-1) &= 0 \end{cases}$$

Den första ekvationen ger $x = 0$ eller $y = 0$. Bara det förra ger lösning av den andra ekvationen: $y = 1$. Enda stationära punkt är alltså $(0, 1)$. Dess karaktär bestäms av den kvadratiska formen

$Q(h) = f''_{xx}(0,1)h^2 + 2f''_{xy}(0,1)hk + f''_{yy}(0,1)k^2$ där $h = x,\ k = y - 1$.

Vi har $f''_{xx}(x,y) = 2y^3,\ f''_{xy}(x,y) = 6xy^2,\ f''_{yy}(x,y) = 6x^2y + 2$, vilket ger

$Q(h) = 2h^2 + 2k^2$, som är *positivt definit* (dvs positiv för alla $(h,k) \neq (0,0)$.
Detta medför att $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ **är ett lokalt minimum**.

(b) Det som efterfrågas är *riktningsderivatan* av T i punkten $(1,2,2)$ och riktningen som ges av vektorn $\boldsymbol{v} = (1,2,-2)$. För en differentierbar funktion, vilket ju varje polynom är, kan denna derivata beräknas enligt formeln $T'_{\boldsymbol{v}}(1,2,2) = \boldsymbol{e} \cdot \nabla T(1,2,2)$, där $\boldsymbol{e}$ är en enhetsvektor i $\boldsymbol{v}$:s riktning. Nu är $\nabla T = (4x, z, y-4)$, $\nabla T(1,2,2) = (4,2,-2)$, $\boldsymbol{e} = \dfrac{1}{3}(1,2,-2)$ och därmed $T'_{\boldsymbol{v}}(1,2,2) = \frac{1}{3}(1,2,-2)\cdot(4,2,-2) = \mathbf{4}$.

(c) Om U är en potential till $\boldsymbol{F}$ så gäller $\nabla U = \boldsymbol{F}$, dvs $U'_x = 4x^3y + e^y,\ U'_y = x^4 + xe^y - 2y$. Det första villkoret innebär att $U = x^4y + xe^y + g(y)$, där g är deriverbar. Det andra villkoret kräver då att $g'(y) = -2y$, så vi kan välja $g(y) = -y^2$ och **potentialen är** $\mathbf{U = x^4y + xe^y - y^2}$.

Fältet $\boldsymbol{F}$ har en potential i hela rummet. Då är integralen längs en kurva lika med potentialdifferensen: $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = U(1,\sqrt{2}) - U(0,1) = (\sqrt{2} + e^{\sqrt{2}} - 2) - (-1) = \mathbf{\sqrt{2} + e^{\sqrt{2}} - 1}$

2. Av symmetriskäl inser vi att x- y- och z-koordinaterna för tyngdpunkten är lika. Det räcker alltså att beräkna tyngdpunktens z-koordinat:

$z_T = \dfrac{\iiint_D z\,dxdydz}{\iiint_D dxdydz}$, där nämnaren uttrycker kroppens volym, vilken vi känner $= \dfrac{1}{8}\dfrac{4\pi\cdot 1^3}{3} = \dfrac{\pi}{6}$.

Täljaren kan beräknas med sfäriska koordinater eller upprepad integration med vanliga polära koordinater i andra steget. Här väljer jag det förstnämnda (även om den andra varianten kanske är kortast):

$$z = r\cos\theta,\ J = r^2\sin\theta,\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$$

$$\iiint_D z\,dxdydz = \iiint_{D'} r\cos\theta\, r^2\sin\theta\, drd\theta d\phi = \int_0^1 r^3\,dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta\,d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi =$$

$$= \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \left[\frac{(\sin\theta)^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16} \text{ och därmed blir } z_T = \frac{\frac{\pi}{16}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{8}.$$

Tyngdpunktens koordinater är $(\mathbf{\frac{3}{8}}, \mathbf{\frac{3}{8}}, \mathbf{\frac{3}{8}})$.

3. (a) Av symmetriskäl är integralen lika med $I = 4 \iint_E \ln(x+y)\, dxdy$ där
$E = \{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$ (dvs en triangelformad fjärdedel av den snedställda kvadraten D).

Integranden är odefinierad i origo, men har konstant tecken (minus) i E. Vi bildar en uttömmande följd av mängder

$E_n = \{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ \frac{1}{n} \leq x+y \leq 1\}$,

så att $I = 4 \lim_{n\to\infty} \iint_{E_n} \ln(x+y)\, dxdy$.

För att beräkna den sistnämnda integralen byter vi variabler enligt:

$$\begin{cases} u &= x+y \\ v &= y \end{cases} \iff \begin{cases} x &= u-v \\ y &= v \end{cases} \quad \text{med Jacobianen } J = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Nytt område blir $E_n' = \{(u,v) : \frac{1}{n} \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq u\}$ och vi får:

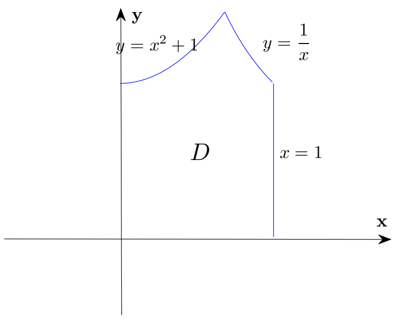
$$\iint_{E_n} \ln(x+y)\, dxdy = \iint_{E_n'} \ln u\, |J|\, dudv = \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln u\, du \int_0^u dv = \int_{\frac{1}{n}}^1 u \ln u\, du = \text{(partiell integration)}$$
$$= \left[\frac{u^2}{2}\ln u\right]_{\frac{1}{n}}^1 - \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{u^2}{2}\frac{1}{u}\, du = \left[\frac{u^2}{2}\ln u - \frac{u^2}{4}\right]_{\frac{1}{n}}^1 = -\frac{1}{4} + \frac{\ln n}{2n^2} - \frac{1}{4n^2} \to -\frac{1}{4} \quad \text{då } n \to \infty.$$

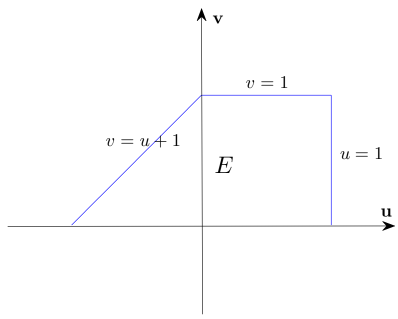
Härav följer att $\mathbf{I = -1}$.

(b) **Metod I**
En naturlig variabelsubstitution (p g a randkurvorna $y - x^2 = 1$ och $xy = 1$) är
$$\begin{cases} u &= y - x^2 \\ v &= xy \end{cases} \quad \text{med inversa Jacobianen } J^{-1} = \begin{vmatrix} -2x & 1 \\ y & x \end{vmatrix} = -2x^2 - y$$
och därmed $|J| = (2x^2+y)^{-1}$, vilket gör att den nya integranden blir 1.
Vi översätter randkurvorna till nya koordinater:

$y = x^2 + 1 \iff u = 1$ $\qquad$ $y = \frac{1}{x} \iff v = 1$ $\qquad$ $x = 1 \iff v = u+1$

$x = 0,\ 0 \leq y \leq 1 \iff v = 0,\ 0 \leq u \leq 1$ $\qquad$ $y = 0,\ 0 \leq x \leq 1 \iff v = 0,\ -1 \leq u \leq 0$





Observera hur två vinkelräta linjer avbildas på var sin sträcka av u-axeln och att dessa sträckor möts i den punkt där $J^{-1} = 0$. Om man ser variabelbytet åt andra hållet, så är det inte värre än att Jacobianen är noll i en punkt på randen ($\neq 0$ i det inre, vilket är det som krävs).

Vi fullföljer nu beräkningen, som blir banal:

$$\iint_D (2x^2 + y)\, dxdy = \iint_E dudv = m(E) = 1,5$$

Metod II
Kurvorna $y = x^2 + 1$ och $y = \frac{1}{x}$ skär varandra i x_0 (varav följer att $x_0^3 = 1 - x_0$). Vi delar upp intervallet i två delar (utan variabelbyte):

$$\int_0^{x_0} dx \int_0^{x^2+1} (2x^2+y)\, dy + \int_{x_0}^1 dx \int_0^{\frac{1}{x}} (2x^2+y)\, dy = \int_0^{x_0} \frac{1}{2}(5x^4+6x^2+1)\, dx + \int_{x_0}^1 (2x + \frac{1}{2x^2})\, dx =$$
$$= \frac{1}{2x_0}(x_0^6 + 2x_0^4 + x_0^2 - 2x_0^3 + 1) + \frac{1}{2} = \quad \text{(sätt in } x_0^3 = 1 - x_0\text{)}$$
$$= \frac{1}{2x_0}\Big((1-x_0)^2 + 2x_0(1-x_0) + x_0^2 - 2(1-x_0) + 1\Big) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2x_0}\Big(2x_0\Big) + \frac{1}{2} = 1,5$$

4. Hastighetsvektorn i en gasströmning är $\boldsymbol{v} = (ye^{-z}, xe^z, x+z)$ och dess masstäthet är $\rho(x,y,z) = z$. Då är vektorfältet $\boldsymbol{F} = \rho\boldsymbol{v}$ flödet av massa per tidsenhet och areaenhet.

   (a) Vi vill beräkna ytintegralen $\Phi = \iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}dS = \iint_S (yze^{-z}, xze^z, xz+z^2)\cdot\boldsymbol{N}dS$, där S är den slutna ytan (kon + ”lock”) och $\boldsymbol{N}$ är dess utåtriktade normalvektor. Här är Gauss sats tillämpbar (fältet är $\mathcal{C}^1$, området K kompakt med $\mathcal{C}^1$-rand. Då är $\Phi = \iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}dS = \iiint_K div\boldsymbol{F}\,dxdydz = \iiint_K (x+2z)\,dxdydz$

   Av symmetriskäl blir integralen av x på den koniska kroppen lika med noll, så vi har

   $\Phi = \iint_{x^2+y^2\leq 1} dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 2z\,dz = \iint_{x^2+y^2\leq 1} (1-x^2-y^2)\,dxdy =$ (med polära koordinater)

   $= 2\pi\int_0^1 (1-r^2)r\,dr = \dfrac{\pi}{\mathbf{2}}.$

   (b) För att få flödet genom den konformade delen av S kan vi subtrahera flödet genom ’locket’, som är lättare att beräkna. Detta flöde blir med uppåtriktad normal, $z=1$ insatt (återigen integreras x till noll på enhetscirkelskivan):

   $\iint_{x^2+y^2\leq 1} (ye^{-1}, xe, x+1)\cdot(0,0,1)\,dxdy = \iint_{x^2+y^2\leq 1} 1\,dxdy = \pi$ (arean av enhetscirkelskivan).

   Slutligen subtraheras detta från Φ så vi får flödet genom den koniska ytan till $-\dfrac{\pi}{\mathbf{2}}$ (det flödar alltså snarare in genom den ytan).

Uppgift 5 på nästa sida!

5. Ytan $f(x,y,z)=1$ med $f(x,y,z)=xy^2z^2$ har tangentplan i varje punkt. I punkten (a,b,c) är tangentplanets ekvation
$\nabla f(a,b,c)\cdot(x-a,y-b,z-c)=0 \iff (b^2c^2,2abc^2,2ab^2c)\cdot(x-a,y-b,z-c)=0 \iff$

$b^2c^2x+2abc^2y+2ab^2cz=ab^2c^2+2ab^2c^2+2ab^2c^2=5$ (då (a,b,c) ligger på ytan, är ju $ab^2c^2=1$!)

Man kan också använda sambandet till att skriva om planet lite enklare: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{2y}{b}+\dfrac{2z}{c}=5$

Vi ser att inget tangentplan kan gå genom origo (origo insatt ger VL=0, HL=5). För ett plan $Ax+By+Cz=D$ som inte går genom origo, har den punkt som är närmast origo en normal som går genom origo. Vi tar en sådan normal $(x,y,z)=t(A,B,C)$ och sätter in i planets ekvation och får den punkt som är närmast origo: $tA^2+tB^2+tC^2=D \Rightarrow t=\dfrac{D}{A^2+B^2+C^2} \Rightarrow$ avståndet är $|t||(A,B,C)|=\dfrac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ (kanske redan känt från annan kurs!)

Nu vet vi därmed att tangentplanet i (a,b,c) har (minsta) avståndet $\dfrac{5}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}+\frac{4}{c^2}}}$ och uppgiften är att maximera detta uttryck, dvs att minimera uttrycket $h(a,b,c)=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}+\dfrac{4}{c^2}$ under bivillkoret $f(a,b,c)=ab^2c^2=1$. Det finns olika sätt att hantera detta, här väljer jag att eliminera variabeln a med bivillkoret:

$$a=\frac{1}{b^2c^2} \Rightarrow h(a,b,c)=b^4c^4+\frac{4}{b^2}+\frac{4}{c^2}=:H(b,c)$$

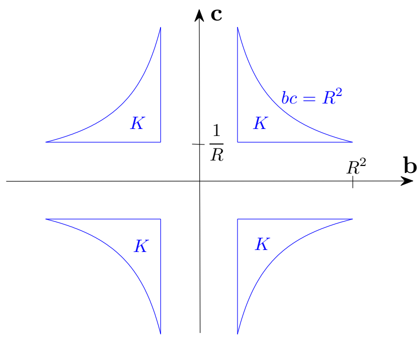
Funktionen H är definierad och differentierbar i hela sin definitionsmängd. Vi söker först dess stationära punkter:

$$\nabla H=\mathbf{0} \iff b^4c^6=b^6c^4=2 \iff b^{10}=c^{10}=2$$

Härav finner vi att det finns fyra stationära punkter som uppfyller $b^2=c^2=2^{\frac{1}{5}}$ och alla ger $H=5\cdot 2^{\frac{4}{5}}$. För att visa att dessa ger vårt minimum (och alltså maximum för avståndet) väljer vi en kompakt mängd

$$K=\{(b,c):|bc|\le R\}\cap\{(b,c):\tfrac{1}{R}\le|b|\le R^2,\ \tfrac{1}{R}\le|c|\le R^2\}$$

där R är stort nog för att våra stationära punkter ska finnas i det inre av K.



För $|b|\le\dfrac{1}{R}$ och $|c|\le\dfrac{1}{R}$ är $H\ge 4R^2$, för $|bc|\ge R$ är $H\ge R^4$, så om R är valt tillräckligt stort, så är värdet av H större på och utanför randen till K än i de stationära punkterna. Eftersom den kontinuerliga funktionen H måste ha både största och minsta värden på K, och dessa antas på randen eller i stationära punkter, så har vi minsta värdet i de stationära punkterna. Detta värde är också minst i hela D_H. Det tidigare beräknade avståndet till de aktuella planen blir $\dfrac{\sqrt{5}}{4^{\frac{1}{5}}}\approx 1,6946$ och ekvationerna för de sökta planen (fyra stycken) med $a=4^{-\frac{1}{5}},\ b=\pm 2^{\frac{1}{10}},\ c=\pm 2^{\frac{1}{10}}$ blir

$$\mathbf{4^{\frac{1}{5}}x\pm 2^{\frac{9}{10}}y\pm 2^{\frac{9}{10}}z=5.}$$

Anmärkning: En kontroll visar att dessa plan tangerar ytan i de punkter som är närmast origo (minimera $x^2+y^2+z^2$ under bivillkoret $xy^2z^2=1$), och dessa punkter är ju naturliga kandidater. Det är lätt att tänka sig att en liten förändring i tangeringspunkten resulterar i ett plan som kommer närmare origo. Dock är det inte alls självklart att tangentplanen i dessa punkter samtidigt har (globalt) störst avstånd till origo.