Tentamen i Flervariabelanalys F/TM, MVE035

2012 01 11 kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.

Telefon: Fredrik Lindgren tel 0703-088304

För godkänt krävs minst 24 poäng.

Betyg 3: 24-35 poäng, betyg 4: 36-47 poäng, betyg 5: 48 poäng eller mera. Bonuspoäng från 2011 ingår.

Lösningar kommer på kursens hemsida:

http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve035/1011

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

---

1. (a) Funktionen $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy$ har en stationär punkt $(3,3)$. Avgör om detta är ett lokalt maximum, ett lokalt minimum eller en sadelpunkt. (3p)

   (b) Bestäm en potential till vektorfältet $\boldsymbol{F}(x,y,z) = ((1+x)e^{x+y}, xe^{x+y} + 2y, -2z)$. (4p)

   (c) Ange ett koordinatbyte $(s,t) = (f(x,y), g(x,y))$ som transformerar uttrycket $xu'_x + 2yu'_y$ till ett som bara innehåller den ena av de partiella derivatorna med avseende på s respektive t, och ange det nya uttrycket. (4p)

2. Beräkna $\iint_D xe^{x+y}\,dxdy$ där D är fyrhörningen med hörn i punkterna $(0,0)$, $(2,1)$, $(1,2)$ och $(-1,1)$. Använd ett lämpligt variabelbyte! (7p)

3. (a) Beräkna det arbete som det plana kraftfältet $\boldsymbol{F}(x,y) = (x^2 + e^{x+y}, x^2 + e^{x+y})$ uträttar på en partikel som förflyttas från $(1,0)$ till $(0,1)$ längs enhetscirkeln i första kvadranten. (7p)

   (b) Beräkna $\int_C \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{r}$ där $\boldsymbol{u} = (y, 2x - z, 3x + 2y)$ och C är den cirkel i planet $z = x$ som har medelpunkt i origo, radie 1 och genomlöps ett varv i en sådan riktning att x-koordinaten avtar då punkten $(0,1,0)$ passeras. (7p)

4. Ett vätskeflöde beskrivs av hastighetsvektorn $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (xz^2 - yz, x^2 - z^2, y^2 + z^3)$. Beräkna vätskeflödet (volym per tidsenhet) av fältet uppåt (i z-led) genom paraboloidytan $z = 1 - x^2 - y^2$ för $x^2 + y^2 \leq 1$. (Allt mäts i SI-enheter). (7p)

5. Motivera varför funktionen $F(y) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan(xy)}{x(1+x^2)}\,dx$ är deriverbar för $y > 0$.

   Bestäm derivatan $F'(y)$ och sedan $F(y)$, och beräkna till sist $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x(1+x^2)}\,dx$ (7p)

6. (a) Definiera begreppet *differentierbar* funktion (välj själv två eller n variabler). (2p)

   (b) Bevisa att varje reellvärd $\mathcal{C}^1$-funktion av två variabler är differentierbar. (5p)

7. Formulera och bevisa satsen om maximum/minimum av en $\mathcal{C}^1$-funktion $f(x,y)$ med ett bivillkor $g(x,y) = 0$. (7p)

Lycka till!/LF