Tentamen i Flervariabelanalys F/TM, MVE035

2013 01 14 kl. 14.00–18.00.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.

Telefon: Peter Helgesson tel 0703-088304

För godkänt krävs minst 24 poäng.

Betyg 3: 24-35 poäng, betyg 4: 36-47 poäng, betyg 5: 48 poäng eller mera. Bonuspoäng från 2012 ingår.

Lösningar kommer på kursens hemsida:

http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve035/1112

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper. /LF

---

1. (a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $x^3z + x^2 + yz^3 = 1$ i punkten $(1, -1, 1)$. (3p)
   (b) Bestäm karaktären hos de stationära punkterna till $f(x, y) = x^3 + 3x^2 - 6xy + y^2$. (3p)
   (c) Transformera uttrycket $xz'_x + yz'_y$ till polära koordinater (r, θ). (3p)
   (d) För avbildningen $(u, v) = \boldsymbol{f}(x, y)$ gäller att $u'_x = 1,\ u'_y = 2,\ v'_x = 3,\ v'_y = 4$ i en viss punkt P. Motivera att $\boldsymbol{f}$ är lokalt inverterbar kring P och beräkna $x'_u,\ x'_v,\ y'_u,\ y'_v$ i punkten $\boldsymbol{f}^{-1}(P)$. (3p)

2. (a) Beräkna $\iint_D xy\ dxdy$, där $D = \{(x, y) : x \geq 1,\ y \geq 1,\ xy \leq 2\}$. (4p)
   (b) Punkterna $P = (2, 1)$ och $Q = (-3, 2)$ är ändpunkterna på en diameter i en cirkel. Om den cirkeln genomlöps i positiv led, är C halvcirkelbågen från P till Q. Beräkna $\int_C (y^2 - 6xy)\, dx + (2xy - 3x^2)\, dy$. (4p)

3. För tre godtyckliga positiva reella tal $x,\ y$ och z gäller olikheten
$$(xyz)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{1}{3}(x + y + z)$$
Detta uttrycker att det geometriska medelvärdet av tre positiva tal aldrig överskrider det aritmetiska medelvärdet. Detta kan bevisas på olika sätt, men bevisa här olikheten genom att maximera produkten av tre positiva tal med given summa. (6p)

4. Beräkna medelvärdet av z-koordinaten i den området $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2,\ \ a \leq z \leq b\}$, där $0 < a < b$ (dvs z-koordinaten för tyngdpunkten av K vid homogen massfördelning). (7p)

5. Kurvan C given av parametriseringen $(x, y, z) = (\cos t, \sin t, \sin 2t),\ 0 \leq t < 2\pi$, ligger på ytan $z = 2xy$ (eller hur?). En partikel rör sig utmed hela C och påverkas av kraftfältet $(\cos x + y^3, \sin y + z^2, x)$. Beräkna det uträttade arbetet. (7p)

6. Integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^3}\, dx$ kan beräknas exakt genom att man utgår från en mera lättberäknad integral $\displaystyle\int_0^\infty f(x, y)\, dx$ med en parameter y. Därefter utför man lämpliga operationer på den senare integralen för att närma sig den förra. Beräkna den förra integralen på så sätt med en lämpligt vald integrand $f(x, y)$. Motivera väl! (6p)

7. (a) Bevisa formeln $f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v}$ (med $|\boldsymbol{v}| = 1$) för en differentierbar funktion f. (4p)
   (b) Formulera Gauss sats. (3p)

8. Formulera och bevisa Greens formel. (7p)