Taylors formel: n variabler, ordning m

Med beteckningarna

$$\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n), \quad \mathbf{h} = (h_1, ..., h_n)$$

definierar vi den linjära *differentialoperatorn*

$$\mathbf{h} \cdot \nabla = h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + ... + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

som verkar på f i punkten $\mathbf{a}$ enligt:

$$\mathbf{h} \cdot \nabla f(\mathbf{a}) = h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} f(\mathbf{a}) + ... + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} f(\mathbf{a}).$$

Vidare kan man räkna med potenser av differentialoperatorn:

$$(\mathbf{h} \cdot \nabla)^2 = (h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + ... + h_n \frac{\partial}{\partial x_n})(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + ... + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}) =$$

$$= h_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + h_n^2 \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + ... + 2h_{n-1} h_n \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1} \partial x_n}$$

(jfr kvadreringsregeln med alla kvadrater och dubbla produkter),
$(\mathbf{h} \cdot \nabla)^n$ analogt (jfr binomialsatsen).

Nu kan vi formulera Taylors formel av ordning m.

Om $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ har kontinuerliga derivator av ordning $m + 1$ i en omgivning till $\mathbf{a}$ så är

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} (\mathbf{h} \cdot \nabla)^k f(\mathbf{a}) + R(\mathbf{h})$$

där

$$R(\mathbf{h}) = \frac{1}{(m+1)!} (\mathbf{h} \cdot \nabla)^{m+1} f(\mathbf{a} + \theta \mathbf{h}) = |\mathbf{h}|^{m+1} B(\mathbf{h}),$$

där $0 < \theta < 1$, och $B(\mathbf{h})$ är en funktion som är begränsad i en omgivning till $\mathbf{h} = \mathbf{0}$.