Tentamen
MVE035 Flervariabelanalys F/TM

2017-06-07 kl. 14.00–18.00

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Peter Hegarty, telefon: 0766377873 (alt. Ankn. 5325, Malin Palö)

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs 40% (20 poäng), inklusive eventuella bonuspoäng från Maple-TA uppgifterna och Matlab. Preliminärt så krävs 60% (30 poäng) för betyget 4 och 80% (40 poäng) för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida direkt efter tentan. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas senast den 27 juni. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan och via Ping Pong, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.
Dessutom granskning alla vardagar utom onsdagar 11-13, MV:s studieexpedition.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak tillvägagångssätten och motiveringarna som ger poäng, inte svaren. Notera att ingen (b)-uppgift är beroende av motsvarande (a)-uppgift.

Uppgifterna

1. Låt $f(x, y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2}$.

(a) Bestäm riktningsderivatan för f i punkten $(3, 1)$ och i riktning mot punkten $(4, 4)$. Bestäm också ekvationen för tangentplanet till funktionsytan $z = f(x, y)$ i punkten $\left(3, 1, \frac{4}{11}\right)$. (3.5p)

(b) Motivera, utan att åberopa derivator av något slag, varför $f(x, y)$ antar både att största och ett minsta värde i den slutna kvadranten $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$. Bestäm sedan dessa värden (eventuellt med hjälp av derivator nu). (3p)

2. Låt (x, y) och (r, θ) beteckna de vanliga Cartesiska och polära koordinaterna i $\mathbb{R}^2$. Bevisa att för en godtycklig C^2-funktion f av två variabler gäller (5p)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$

3. (a) Beräkna $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x\, e^{2y}}{4-y}\, dy\, dx$. (3p)

(b) Bestäm, med bevis, värdet av $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$. (3.5p)

Var god vänd!

4. (a) Bestäm $\int_\gamma 2\cos y\,dx + \left(\frac{1}{y} - 2x\sin y\right)\,dy + \frac{1}{z}\,dz$, där γ är raksträckan från $(0,\,2,\,1)$ till $(1,\,\pi,\,2)$. (3p)

(b) Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara ett kontinuerligt vektorfält definierat i en bågvis sammanhängande öppen mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Om kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av vägen, bevisa att $\mathbf{F}$ har en potential i Ω. (5p)

(OBS! Det räcker att ge beviset för $n = 2$ om du så vill).

5. (a) Bestäm $\oint_C (e^x + 6xy)\,dx + (8x^2 + \sin y^2)\,dy$, där $C = \partial D$ och $D = \{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$. (3p)

(b) Bestäm arean av området $D = \{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1\}$. (3p)

(TIPS: Sätt $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$).

6. Låt Y_1 vara den del av ytan $z = x^2 + y^2$ som begränsas av ytan $Y_2 : x^2 + y^2 = 4$.

(a) Skissa Y_1 och Y_2 och beräkna ytarean hos Y_1. (3p)

(b) Låt K vara området som begränsas av Y_1, Y_2 och xy-planet. Bestäm flödet ut ur K av vektorfältet $\mathbf{F}(x,\,y,\,z) = (y,\,-x,\,z^2)$. Härled värdet av $\iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS$, där $\hat{N}$ är normalen med en positiv z-komponent. (3p)

7. För $x > 0$ och $y > 0$, låt $F(x,\,y) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t}\,dt$. Bevisa att $F(x,\,y) = \ln\left(\frac{y}{x}\right)$. (5p)

8. Vilka av följande formler stämmer, för alla 3-dimensionella C^2-skalärfält ϕ, respektive C^2-vektorfält $\mathbf{F}$? Om du hävdar att formeln stämmer ge ett bevis. Om du hävdar motsatsen ge ett motexempel. (7p)

(a) $\nabla\cdot(\nabla\phi) = 0$.

(b) $\nabla\times(\nabla\phi) = \mathbf{0}$.

(c) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) = 0$.

(d) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F}) = \mathbf{0}$.

Lycka till!

Lösningar Flervariabelanalys F/TM, 170607

1. (a)

$$f_x = \frac{(1+x^2+y^2)\cdot 1 - (x+y)2x}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{1+y^2-x^2-2xy}{(1+x^2+y^2)^2} \overset{(3,1)}{=} -\frac{13}{121},$$
$$f_y = \frac{(1+x^2+y^2)\cdot 1 - (x+y)2y}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{1+x^2-y^2-2xy}{(1+x^2+y^2)^2} \overset{(3,1)}{=} \frac{3}{121}.$$

Ritkningen av intresse är $(4,\,4) - (3,\,1) = (1,\,3)$ och riktningsderivatan är

$$f_{\mathbf{u}} = \nabla f \cdot \hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{121}(-13,\,3)\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}(1,\,3) = -\frac{4}{121\sqrt{10}}.$$

Tangentplanets ekvation lyder i allmänhet

$$z - z_0 = f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0).$$

Insättning av $(x_0,\,y_0,\,z_0) = \left(3,\,1,\,\frac{4}{11}\right)$ samt värdena ovan för f_x och f_y ger

$$z - \frac{4}{11} = -\frac{13}{121}(x-3) + \frac{3}{121}(y-1) \Rightarrow \cdots \Rightarrow 13x - 3y + 121z = 80.$$

(b) $f(0,\,0) = 0$ och f antar endast icke-negativa värden då $x \geq 0$ och $y \geq 0$. Således är noll det minsta värdet som antas i kvadranten. Det är också klart att $f(x,\,y) \to 0$ då antingen $|x|$ eller $|y| \to \infty$, som innebär att det största värdet för kvadranten kommer att antas i en tillräckligt stor axelparallell rektangel, säg, med x- och y-axlarna som två av dess sidor. Det återstår alltså att kolla alla kritiska punkter till f inom kvadranten samt kvadrantens rand. Från (a) ser vi att i en kritisk punkt gäller

$$1+y^2-x^2-2xy = 1+x^2-y^2-2xy = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow 1-2x^2 = 0 \Rightarrow x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vi har $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. När det gäller randen så består den dels av den positiva x-axeln och dels den positiva y-axeln. Eftersom $f(x,\,y) = f(y,\,x)$ så räcker det att kontrollera x-axeln. Vi har $g(x) = f(x,\,0) = \frac{x}{1+x^2}$. I en kritisk punkt för g gäller $0 = g'(x) = \cdots = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, så $x = 1$ ty x måste vara positivt. Då är $g(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$. Slutligen, eftersom $\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$ så är $\frac{1}{\sqrt{2}}$ det största värdet som f antar i kvadranten.

2. Enligt kedjeregeln har vi först

$$f_r = f_x x_r + f_y y_r = \cos\theta f_x + \sin\theta f_y. \tag{1}$$

Derivera en gång till m.a.p. r och notera att $\partial\theta/\partial r = 0$ så får vi näst

$$\begin{aligned} f_{rr} &= \cos\theta(f_{xx}x_r + f_{xy}y_r) + \sin\theta(f_{yx}x_r + f_{yy}y_r) \\ &= \cos\theta(\cos\theta f_{xx} + \sin\theta f_{xy}) + \sin\theta(\cos\theta f_{yx} + \sin\theta f_{yy}) \\ &\overset{f_{xy}=f_{yx}}{=} \cos^2\theta f_{xx} + 2\sin\theta\cos\theta f_{xy} + \sin^2\theta f_{yy}. \end{aligned} \tag{2}$$

Nu deriverar vi m.a.p. θ i stället. Först,

$$f_\theta = f_x x_\theta + f_y y_\theta = r(-\sin\theta f_x + \cos\theta f_y).$$

Derivera en gång till med hjälp av produktregeln (och notera att $\partial r/\partial\theta = 0$) så får vi

$$\begin{aligned} f_{\theta\theta} &= r\left[-\cos\theta f_x - \sin\theta(f_{xx}x_\theta + f_{xy}y_\theta) - \sin\theta f_y + \cos\theta(f_{yx}x_\theta + f_{yy}y_\theta)\right] \\ &= -r(\cos\theta f_x + \sin\theta f_y) + \\ &\quad r\left[-\sin\theta(f_{xx}(-r\sin\theta) + f_{xy}(r\cos\theta)) + \cos\theta(f_{yx}(-r\sin\theta) + f_{yy}(r\cos\theta))\right] \\ &\overset{f_{xy}=f_{yx}}{=} -r(\cos\theta f_x + \sin\theta f_y) + r^2(\sin^2\theta f_{xx} - 2\sin\theta\cos\theta f_{xy} + \cos^2\theta f_{yy}). \end{aligned} \tag{3}$$

Från (1), (2), (3) och den trigonometriska ettan ser vi att

$$f_{rr} + \frac{1}{r}f_r + \frac{1}{r^2}f_{\theta\theta} = f_{xx} + f_{yy}, \quad \text{v.s.v.}$$

3. (a) Integrationsområdet ges på formen $D = \{(x, y) : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4 - x^2\}$. Det kan lika väl ges som $D = \{(x, y) : 0 \le y \le 4, 0 \le x \le \sqrt{4-y}\}$. Så vi byter integrationsordning och räknar:

$$\int_0^4 \frac{e^{2y}}{4-y}\,dy \int_0^{\sqrt{4-y}} x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 e^{2y}\,dy = \frac{1}{4}(e^8 - 1).$$

(b) Av symmetriskäl så är $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx$. Den senare integralen är $\sqrt{\pi}$ - se Exempel 21 i avsnitt 6.6 i boken. Så svaret är $\sqrt{\pi}/2$.

4. (a) Integralen är på formen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(2\cos y, \frac{1}{y} - 2x\sin y, \frac{1}{z}\right)$. Fältet $\mathbf{F}$ luktar potentialfält. För att bestämma ϕ sådan att $\nabla\phi = \mathbf{F}$ så integrerar vi i varje koordinat:

$$\phi = \int F_1\,dx = 2x\cos y + f_1(y, z),$$
$$\phi = \int F_2\,dy = \ln y + 2x\cos y + f_2(x, z),$$
$$\phi = \int F_3\,dz = \ln z + f_3(x, y).$$

För konsekvens krävs

$$\phi(x, y, z) = 2x\cos y + \ln y + \ln z + C.$$

Då har vi att

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \phi(1, \pi, 2) - \phi(0, 2, 1) = (-2 + \ln\pi + \ln 2) - (0 + \ln 2 + 0) = \ln\pi - 2.$$

(b) Sats 9.4.3 i boken.

5. (a) Enligt Greens sats så är

$$\oint_{\partial D}(P, Q)\cdot(dx, dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \iint_D (16x - 6x)\,dx\,dy =$$
$$= 10\iint_D x\,dx\,dy = 10\int_0^{\pi/2}\int_1^3 (r\cos\theta)r\,dr\,d\theta = 10\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta\int_1^3 r^2\,dr = 10\times 1\times\frac{26}{3} = \frac{260}{3}.$$

(b) Enligt Greens sats så är $\text{Area}(D) = \frac{1}{2}\oint_{\partial D} x\,dy - y\,dx$. Vi beräknar kurvintegralen med hjälp av det föreslagna variabelbytet och får

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^3 t)(3\sin^2 t\cos t\,dt) - (\sin^3 t)(-3\cos^2 t\sin t\,dt) = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt =$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2 dt = \frac{3}{8}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1 - \cos 4t)\,dt = \frac{3\pi}{8}.$$

6. (a) För skissen se Figur 1. Vi har $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. Enligt formeln för arean av en funktionsyta har vi att

$$\text{Area}(Y_1) = \iint_{\pi(Y_1)}\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\,dx\,dy = \iint_{x^2+y^2\le 4}\sqrt{1 + 4(x^2+y^2)}\,dx\,dy =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2\sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^2 r\sqrt{1+4r^2}\,dr =$$
$$\overset{u:=1+4r^2}{=} \frac{\pi}{4}\int_1^{17}\sqrt{u}\,du = \cdots = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1).$$

(b) Enligt Gauss sats så är

$$\iint_{\partial K} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_K \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = 2\iiint_K z\,dV =$$

$$= 2\iint_{x^2+y^2\le 4} dx\,dy \int_0^{x^2+y^2} z\,dz = \iint_{x^2+y^2\le 4} (x^2+y^2)^2\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^4(r\,dr\,d\theta) = \cdots = \frac{64\pi}{3}.$$

Flödet kan delas upp i tre delar enligt

$$\iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS + \iint_{Y_2} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS + \iint_{Y_3} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS,$$

där Y_2 är en del av cylindern $x^2+y^2=4$ och Y_3 är en del av xy-planet. Notera först att på Y_1 så gäller att normalen som pekar *ut* från K har en positiv z-komponent. Sedan konstatera att normalen till Y_2 är parallell med den polära radien, alltså proportionell med vektorn $(x,\,y,\,0)$, medan att på Y_3 så är $z=0$ samt enhetsnormalen är $(0,\,0,\,-1)$. Det innebär att $\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}=0$ överallt på både Y_2 och Y_3. Således är även $\iint_{Y_1}\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = \frac{64\pi}{3}$.

7. Det är lätt att se att integranden är kontinuerlig och går mot $y-x$ då $t\to 0$ (använd Taylorutvecklingen av exp eller L'Hôpitals regel t.ex.), samt att integralen konvergerar då $t\to\infty$. Därmed kan vi derivera under integraltecknet. Vi har

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-xt}-e^{-yt}}{t}\right)dt = \int_0^\infty -e^{-xt}\,dt = \frac{e^{-xt}}{x}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{x},$$

och, på motsvarande vis, $\partial F/\partial y = 1/y$. Sedan integrerar vi m.a.p. respektive variabel:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{1}{x} \Rightarrow F(x,\,y) = -\int \frac{1}{x}\,dx + F_1(y) = -\ln x + F_1(y),$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{y} \Rightarrow F(x,\,y) = \int \frac{1}{y}\,dy + F_2(x) = \ln y + F_2(x).$$

För konsekvens krävs $F(x,\,y)=\ln y-\ln x+C$, för någon konstant C. Men det är uppenbart från F:s ursprungliga definition att $F(x,\,x)=0$. Insätning ger $C=0$, så $F(x,\,y)=\ln y-\ln x=\ln(y/x)$, v.s.v.

8. (a) Falskt. T.ex. om $\phi(x,\,y,\,z)=x^2$ så är $\nabla\phi=(2x,\,0,\,0)$ och $\nabla\cdot(\nabla\phi)=2$.

(b) Sant, se Exempel 16 i avsnitt 10.4 i boken. Utförligt bevis finns i föreläsningsanteckningarna.

(c) Sant, se Exempel 15 i avsnitt 10.4 i boken. Utförligt bevis finns i föreläsningsanteckningarna.

(d) Falskt. T.ex. om $\mathbf{F}=(0,\,0,\,yz)$ så kan man lätt kontrollera att $\nabla\times\mathbf{F}=(z,\,0,\,0)$ och sedan att $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F})=(0,\,1,\,0)$.