Tentamen
MVE035 Flervariabelanalys F/TM

2017-03-11 kl. 14.00–18.00

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Peter Hegarty, telefon: 0766377873 (alt. Ankn. 5325, Håkan Strand Bölviken)

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs 20 poäng, inklusive eventuella bonuspoäng från Maple-TA uppgifterna och Matlab. Preliminärt så krävs 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida direkt efter tentan. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas senast den 31 mars. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan och via Ping Pong, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.
Dessutom granskning alla vardagar utom onsdagar 11-13, MV:s studieexpedition.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak tillvägagångssätten och motiveringarna som ger poäng, inte svaren.

Uppgifterna

1. Låt $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{xy}$, $xy \neq 0$.

(a) Bestäm alla kritiska punkter till f och deras karaktär. (3p)

(b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till f i punkten $(2, -1)$. (2p)

2. Låt $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^3$.

(a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till nivåytan $F(x, y, z) = 2$ i punkten $(1, 3, 2)$. (2p)

(b) Motivera varför $F(x, y, z) = 2$ definierar implicit en funktion $z = f(x, y)$ i en omgivning av punkten $(1, 3)$ och bestäm riktningsderivatan av f i punkten $(1, 3)$ och i riktning mot punkten $(2, 5)$. (3p)

(c) Bestäm de största och minsta värdena hos F längs skärningskurvan mellan konen $z^2 = x^2 + y^2$ och planet $x - 2z = 3$. (4p)

3. Beräkna $\iint_D e^{y^3}\, dx\, dy$, där $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$. (3p)

Var god vänd!

4. Låt $Y \subseteq \mathbb{R}^3$ vara ytan som ges av

$$Y = \left\{ \mathbf{r}(s,\, t) = \left(s + \frac{t^3}{3} - 1,\, s - \frac{t^3}{3} - 1,\, st^2 \right) : 0 \leq s \leq 2,\, 0 \leq t \leq 3 \right\}.$$

(a) Bestäm en funktion $f(s,\, t)$ så att arean av Y är $\int_0^3 \int_0^2 f(s,\, t)\, ds\, dt$. (Obs! Du behöver ej beräkna ytarean). (2p)

(b) Låt γ vara den orienterade kurvan $\{\mathbf{r}(1,\, t) : 0 \leq t \leq 3\}$. Bestäm längden av γ. (3p)

(c) Bestäm $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = (e^{yz} - \pi y^2 \sin(\pi x),\, xze^{yz} + 2y\cos(\pi x),\, xye^{yz} + 2z)$. (3p)

5. Låt $K = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 + \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{25 - x^2 - y^2}\}$.

(a) Skissa området K. (1p)

(b) Bestäm flödet ut ur K av vektorfältet $\mathbf{F} = (yz + xz,\, x^2 + yz,\, z^2 + y)$. (4p)

(c) Bestäm masscentrumet för en kropp som ockuperar området K och är gjord av ett homogent material. (3p)

6. Beräkna $\oint_\gamma y\, dx - x\, dy + (z^2 - xy)\, dz$, där γ är skärningskurvan mellan den paraboliska cylindern $z = y^2$ och den cirkulära cylindern $x^2 + y^2 = 9$, orienterad moturs sett uppifrån längs z-axeln (Tips: Orienteringen innebär att γ är positivt orienterad som rand till det positivt orienterade stycket av den paraboliska cylindern). (4p)

7. (a) Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en begränsad mängd. Förklara vad som menas med att D är *kvadrerbar*. (1p)

(b) Låt nu D vara en sluten, axelparallell rektangel, säg $D = \{(x,\, y) : a \leq x \leq b,\, c \leq y \leq d\}$. Förklara vad som menas med en *trappfunktion* $\Phi : D \to \mathbb{R}$. (1p)

(c) För en sådan rektangel D, förklara vad som menas med att en begränsad funktion $f : D \to \mathbb{R}$ är *Riemannintegrerbar*. Bevisa sedan att varje kontinuertlig funktion på D är Riemannintegrerbar. (6p)

8. (a) Förklara vad som menas med att en funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är *differentierbar* i en punkt $(a_1,\, \ldots,\, a_n)$. (1p)

(b) Formulera och bevisa kedjeregeln för en sammansättning $f(x,\, y) = f(g_1(t),\, g_2(t))$ där f, g_1, g_2 är differentierbara funktioner av 2, 1, 1 variabler respektivt. (6p)

Lycka till!

Lösningar Flervariabelanalys F/TM, 170311

1. (a) I en kritisk punkt gäller

$$f_x = 2x - \frac{2}{x^2 y} = 0 \Rightarrow x^3 y = 1,$$
$$f_y = 2y - \frac{2}{xy^2} = 0 \Rightarrow xy^3 = 1.$$

Så $1 = x^3y = xy^3 \Rightarrow xy(x^2) = xy(y^2)$. Eftersom $xy \neq 0$ i definitionsmängden till f så måste $x^2 = y^2$ gälla i en kritisk punkt, alltså $y = \pm x$. Sätt in i $x^3y = 1$ så får vi $x^4 = \pm 1$. Minustecknet är omöjligt så $y = +x$ och $x^4 = 1 \Rightarrow x = y = \pm 1$. Så det finns två kritiska punkter, $(1,\, 1)$ och $(-1,\, -1)$.

För att bestämma punkternas karaktär så beräknar vi

$$f_{xx} = 2 + \frac{4}{x^3y} = 2 + \frac{4}{(\pm 1)^3(\pm 1)} = 6,$$
$$f_{xy} = \frac{2}{x^2y^2} = \frac{2}{(\pm 1)^2(\pm 1)^2} = 2,$$
$$f_{yy} = 2 + \frac{4}{xy^3} = 2 + \frac{4}{(\pm 1)(\pm 1)^3} = 6.$$

I bägge kritiska punkter gäller alltså $f_{xx} = 6 > 0$ samt $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 6\cdot 6 - 2^2 = 32 > 0$, vilket innebär att bägga är lokala minima.

(b) Om vi sätter in $(2,\, -1)$ i de redan härledde formlerna för f:s partiella derivator av ordning 0, 1 och 2, så får vi

$$f(2,\, -1) = 4, \quad f_x(2,\, -1) = \frac{9}{2}, \quad f_y(2,\, -1) = -3, \quad f_{xx}(2,\, -1) = \frac{3}{2}, \quad f_{xy}(2,\, -1) = \frac{1}{2}, \quad f_{yy}(2,\, -1) = 0.$$

Så Taylorpolynomet av grad 2 blir

$$P(h,\, k) = f(a,\, b) + (hf_x(a,\, b) + kf_y(a,\, b)) + \frac{1}{2}(h^2 f_{xx}(a,\, b) + 2hkf_{xy}(a,\, b) + k^2 f_{yy}(a,\, b)) =$$
$$= 4 + \left(\frac{9h}{2} - 3k\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3h^2}{2} + hk\right).$$

2. (a) I punkten $(1,\, 3,\, 2)$ gäller

$$\nabla F = (F_x,\, F_y,\, F_z) = (2x,\, 2y,\, -3z^2) = (2,\, 6,\, -12).$$

Tangentplanets ekvation lyder alltså

$$(2,\, 6,\, -12) \cdot (x - 1,\, y - 3,\, z - 2) = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow x + 3y - 6z = -2.$$

(b) $F_z = -12 \neq 0$ i punkten $(1,\, 3,\, 2)$ så z definieras implicit som en funktion av x och y i en omgivning av den punkten, enligt Implicita Funktionssatsen. Vi har dessutom

$$\nabla f = (f_x,\, f_y) = \left(-\frac{F_x}{F_z},\, -\frac{F_y}{F_z}\right) = \left(\frac{1}{6},\, \frac{1}{2}\right).$$

Så riktningsderivatan i riktningen $\mathbf{u} = (2,\, 5) - (1,\, 3) = (1,\, 2)$ är

$$\nabla f \cdot \hat{\mathbf{u}} = \left(\frac{1}{6},\, \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(1,\, 2) = \cdots = \frac{7}{6\sqrt{5}}.$$

(c) Vi tillämpar Lagranges metod ty vi söker max/min av $F(x,\, y,\, z)$ under bivillkoren $g_1 = g_2 = 0$ där $g_1(x,\, y,\, z) = x^2 + y^2 - z^2$ och $g_2(x,\, y,\, z) = x - 2z - 3$. Detta leder till följande system av 5 ekvationer:

$$\begin{aligned} F_x = \lambda g_{1,\,x} + \mu g_{2,\,x} &\Rightarrow 2x = \lambda(2x) + \mu, \\ F_y = \lambda g_{1,\,y} + \mu g_{2,\,y} &\Rightarrow 2y = \lambda(2y) + 0, \\ F_z = \lambda g_{1,\,z} + \mu g_{2,\,z} &\Rightarrow -3z^2 = \lambda(-2z) - 2\mu, \\ g_1(x,\, y,\, z) = 0 &\Rightarrow x^2 + y^2 = z^2, \\ g_2(x,\, y,\, z) = 0 &\Rightarrow x - 2z = 3. \end{aligned}$$

Den 2:a ekvationen medför direkt att antingen $y = 0$ eller $\lambda = 1$.

FALL 1: $y = 0$. Den 4:e ekvationen medför $x^2 = z^2 \Rightarrow x = \pm z$. Om $x = z$, insättning i den 5:e ekvationen ger $z = -3$ och kandidatpunkten $(-3,\, 0,\, -3)$. Om $x = -z$, insättning i den 5:e ekvationen ger $z = -1$ och kandidatpunkten $(1,\, 0,\, -1)$.

FALL 2: $\lambda = 1$. Insättning i den 1:a ekvationen ger $\mu = 0$. Insättning i den 3:e ekvationen ger $-3z^2 = -2z \Rightarrow z = 0$ eller $z = \frac{2}{3}$. Om $z = 0$, insättning i den 4:e ekvationen ger $x = y = 0$, som säger emot den 5:e ekvationen. Om $z = \frac{2}{3}$, insättning i den 5:e ekvationen ger $x = \frac{13}{3}$, så $|x| > |z|$, som säger emot den 4:e ekvationen. Fall 2 ger inga ytterligare kandidatpunkter alltså.

Slutligen, $F(-3,\, 0,\, -3) = 36$ och $F(1,\, 0,\, -1) = 2$, så dessa måste vara de efterfrågade max och min värdena.

3. Området D kan i stället beskrivas som $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\, 0 \le x \le y^2\}$. Så dubbelintegralen kan skrivas

$$\int_0^1 e^{y^3}\, dy \int_0^{y^2} dx = \int_0^1 y^2 e^{y^3}\, dy = \frac{1}{3} e^{y^3}|_0^1 = \frac{1}{3}(e - 1).$$

4. (a)

$$f(s,\, t) = ||\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t|| = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & t^2 \\ t^2 & -t^2 & 2st \end{vmatrix} =$$

$$= ||(2st + t^4,\, -2st + t^4,\, -2t^2)|| = \sqrt{(2st + t^4)^2 + (-2st + t^4)^2 + (-2t^2)^2} = \sqrt{8s^2t^2 + 2t^8 + 4t^4}.$$

(b) $\mathbf{r}(1,\, t) = (t^3/3,\, -t^3/3,\, t^2) \Rightarrow \mathbf{r}'(1,\, t) = (t^2,\, -t^2,\, 2t) \Rightarrow ||\mathbf{r}'(1,\, t)|| = \sqrt{(t^2)^2 + (-t^2)^2 + (2t)^2} = t\sqrt{4 + 2t^2}$. Alltså, kurvans längd är

$$\begin{aligned} \int_0^3 ||\mathbf{r}'(1,\, t)||\, dt = \int_0^3 t\sqrt{4 + 2t^2}\, dt &= (u := 4 + 2t^2) = \\ = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} u\sqrt{u}|_4^{22} = \cdots &= \frac{1}{3}(11\sqrt{22} - 4). \end{aligned}$$

(c) Fältet $\mathbf{F}$ är ett potentialfält. För att bestämma ϕ sådan att $\nabla\phi = \mathbf{F}$ så integrerar vi i varje koordinat:

$$\begin{aligned} \phi &= \int F_1\, dx = xe^{yz} + y^2 \cos(\pi x) + f_1(y,\, z), \\ \phi &= \int F_2\, dy = xe^{yz} + y^2 \cos(\pi x) + f_2(x,\, z), \\ \phi &= \int F_3\, dz = xe^{yz} + z^2 + f_3(x,\, y). \end{aligned}$$

För konsekvens krävs

$$\phi(x,\, y,\, z) = xe^{yz} + y^2 \cos(\pi x) + z^2 + C.$$

Eftersom $\mathbf{r}(1,\, 0) = (0,\, 0,\, 0)$ och $\mathbf{r}(1,\, 3) = (9,\, -9,\, 9)$ har vi då

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(9,\, -9,\, 9) - \phi(0,\, 0,\, 0) = \cdots = 9e^{-81}.$$

5. (a) Se Figur 1.

(b) Först beräknar vi

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(yz + xz) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + yz) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2 + y) = z + z + 2z = 4z.$$

Så flödet ut ur K är $4 \iiint_K z\, dV$, enligt Gauss sats. Det är lämpligast att använda cylindriska koordinater:

$$\iiint_K z\, dV = \iint_{\pi(K)} dx\, dy \int_{1+\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{25-x^2-y^2}} z\, dz =$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{\pi(K)} [(25 - x^2 - y^2) - (1 + \sqrt{x^2 + y^2})^2]\, dx\, dy = \iint_{\pi(K)} (12 - (x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + y^2})\, dx\, dy.$$

För att ta reda på $\pi(K)$ sätter vi $1 + \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$. Låt $r := \sqrt{x^2 + y^2}$. Så $1 + r = \sqrt{25 - r^2} \Rightarrow 1 + 2r + r^2 = 25 - r^2 \Rightarrow r^2 + r - 12 = 0 \Rightarrow r = -4$ eller $r = 3$. Så $r = 3$ måste gälla. M.a.o. $\pi(K)$ är cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 9$. Vi byter till polära koordinater alltså och får

$$\iint_{\pi(K)} (12 - (x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + y^2})\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 (12 - r^2 - r) r\, dr = \cdots = \frac{99\pi}{2}.$$

Så flödet ut ur K är $4 \times \left(\frac{99\pi}{2}\right) = 198\pi$.

(c) Låt $\overline{m} = (m_x, m_y, m_z)$ beteckna masscentrumet. Av symmetriskäl så måste $m_x = m_y = 0$ gälla. Vi har $m_z = \iiint_K z\, dV / \iiint_K dV$. Notera att täljaren beräknades redan i del (b) och är lika med $\frac{99\pi}{2}$. För nämnaren gör vi likadant:

$$\iiint_K dV = \iint_{\pi(K)} dx\, dy \int_{1+\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{25-x^2-y^2}} dz = \iint_{\pi(K)} [\sqrt{25 - x^2 - y^2} - (1 + \sqrt{x^2 + y^2})]\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 (\sqrt{25 - r^2} - 1 - r) r\, dr = 2\pi \left[\int_0^3 r\sqrt{25 - r^2}\, dr - \int_0^3 (r + r^2)\, dr\right] =$$

$$= \cdots = 2\pi \left(\frac{61}{3} - \frac{27}{2}\right) = \frac{41\pi}{3}.$$

Så $m_z = \frac{99\pi}{2} / \frac{41\pi}{3} = \frac{297}{82}$ och masscentrumet ligger i $\left(0,\, 0,\, \frac{297}{82}\right)$.

6. Låt $\mathbf{F} = (y,\, -x,\, z^2 - xy)$ så att kurvintegralen blir $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Vi vill tillämpa Stokes Sats:

$$\oint_{\delta Y} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS.$$

I så fall måste Y vara den del av ytan $z = y^2$ som ligger inuti cylindern $x^2 + y^2 = 9$. I så fall är $\hat{\mathbf{N}}\, dS = (-f_x,\, -f_y,\, 1)\, dx\, dy = (0,\, -2y,\, 1)\, dx\, dy$. Vi har dessutom

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & z^2 - xy \end{vmatrix} = \cdots = (-x,\, y,\, -2).$$

Så $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = (-x,\, y,\, -2) \cdot (0,\, -2y,\, 1)\, dx\, dy = (-2y^2 - 2)\, dx\, dy$. Vi integrerar över $\pi(Y)$, som är cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 9$. Alltså

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\iint_{\pi(Y)} (2y^2 + 2)\, dx\, dy = -18\pi - 2 \iint_{\pi(Y)} y^2\, dx\, dy =$$

$$= -18\pi - 2 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta \int_0^3 r^3\, dr = -18\pi - \frac{81\pi}{2} = -\frac{117\pi}{2}.$$

7. (a) Se Definition 6.2.4 i kursboken.

(b) Se s.228 i kursboken.

(c) Se Definition 6.1.1 och Sats 6.1.3 i kursboken.

8. (a) Se Definition 2.2.2 i kursboken.

(b) Se Sats 2.3.4 i kursboken.