Uppgift 9.39 i PB

Oliver Thim
toliver@chalmers.se

Februari 2019

Beräkna
$$I = \int_\gamma \left(\sqrt{x^2-y} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-y}}\right)dx - \frac{x}{2\sqrt{x^2-y}}dy,$$
där γ är kurvan $x = y^2$ från $(1,-1)$ till $(4,-2)$.

Lösning
Vi börjar med att skriva upp en parametrisering för γ, vilket är enkelt då x kan skrivas som en funktion av y.

$$\gamma : \boldsymbol{r}(t) = (t^2, -t),\ 1 \leq t \leq 2.$$

Denna typ av uppgift brukar generellt lösas med antingen parametrisering, Greens formel eller genom att hitta en potentialfunktion till vektorfältet som skall integreras. Då vektorfältet ser ganska komplicerat ut kommer antagligen parametrisering och Greens formel bli ganska jobbigt så vi försöker istället hitta en potentialfunktion. Det är dock inte säkert att en potentialfunktion existerar och om så är fallet får vi angripa problemet med någon av de andra metoderna.

Vi definierar $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ enligt

$$\boldsymbol{F} = (P(x,y), Q(x,y)) = \left(\sqrt{x^2-y} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-y}}, \frac{-x}{2\sqrt{x^2-y}}\right),$$

integralen I kan då skrivas

$$I = \int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r},$$

vilket är en väldigt vanlig notation. Vi vill nu hitta en funktion $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ som uppfyller att $\boldsymbol{F} = \nabla U$ (U kallas potentialen till $\boldsymbol{F}$) då det gör att integralen kan beräknas på ett enkelt sätt

$$
\begin{aligned}
I &= \int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \{\boldsymbol{F} = \nabla U\} = \int_\gamma \nabla U \cdot d\boldsymbol{r} = \{\text{Def av kurvintegral}\} = \\
&= \int_1^2 \nabla U(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)\ dt = \{\text{Kedjeregeln}\} = \int_1^2 \frac{d}{dt} U(\boldsymbol{r}(t))\ dt = \\
&= U(\boldsymbol{r}(2)) - U(\boldsymbol{r}(1)).
\end{aligned}
$$

Alltså

$$
\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = U(\underbrace{\boldsymbol{r}(2)}_{\text{slutpunkt}}) - U(\underbrace{\boldsymbol{r}(1)}_{startpunkt}). \tag{1}
$$

Denna beräkningen behöver ej göras varje gång då resultatet finns formulerat som en sats i boken.

För att bestämma integralens värde måste vi alltså att bestämma U. $\boldsymbol{F} = \nabla U$ kan skrivas

$$
\begin{cases}
\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y) = \sqrt{x^2 - y} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - y}} \quad (*) \\
\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y) = \frac{-x}{2\sqrt{x^2 - y}} \quad (**).
\end{cases}
$$

Om vi integrerar $(**)$ m.a.p y får vi

$$
\begin{aligned}
U(x, y) &= \int \frac{-x}{2\sqrt{x^2 - y}}\ dy \ + \ \phi(x) = \frac{-x}{2} \int (x^2 - y)^{-1/2} dy \ + \ \phi(x) = \\
&= x(x^2 - y)^{1/2} \ + \ \phi(x),
\end{aligned}
$$

där $\phi(x)$ är någon okänd funktion som kan bero på x. (Anledningen till att jag började med ekvation $(**)$ var jag bara behövde integrera en funktion). Om vi nu deriverar $U(x, y)$ m.a.p x får vi med produktregeln att

$$
\frac{\partial U}{\partial x} = \sqrt{x^2 - y} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - y}} \cdot x + \phi'(x).
$$

Om vi jämnför denna med ekvation $(*)$ får vi att $\phi'(x) = 0$ vilket ger att $\phi(x) = C$ för någon konstant $C \in \mathbb{R}$ och potentialen blir

$$
U(x, y) = x\sqrt{x^2 - y} + C.
$$

Med ekvation (1), som vi härledde, blir integralen

$$
\begin{aligned}
I &= \int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = U(\boldsymbol{r}(2)) - U(\boldsymbol{r}(1)) = U(4, -2) - U(1, -1) = \\
&\left(4\sqrt{16 + 2} + C\right) - \left(\sqrt{1^2 + 1} + C\right) = 11\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Svar: } I = 11\sqrt{2}}$