Tentamen
MVE035/6 Flervariabelanalys F/TM

2019-03-16 kl. MVE035: 08.30–12.30, MVE036: 09.30 - 13.30

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Olof Zetterqvist, telefon: 5325 (alt. Peter Hegarty 070-5705475)

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs 20 poäng, inklusive eventuella bonuspoäng erhållna under VT-2019 från Möbius uppgifterna och Matlab. Preliminärt så krävs 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand. För slutbetyg krävs godkänt på tavelmomentet, samt för TM-studenterna godkänt på extra-vektoranalys momentet.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida direkt efter tentan. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas i Ladok senast den 5 april. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan och via Ping Pong, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.
Dessutom granskning alla vardagar utom onsdagar 11-13, MV:s studieexpedition.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak tillvägagångssätten och motiveringarna som ger poäng, inte svaren.
I de uppgifter som består av fler olika delar går det alltid att lösa de enskilda delarna oberoende av varandra, även om man kan ibland spara räknetid genom att lösa deluppgifterna sekventiellt.

Uppgifterna

1. Låt

$$f_1(x,y) = x^2+y^2, \qquad f_2(x,y) = y^2x^3+\frac{y^3}{x}, \quad g_1(x,y) = 5x^2+10y^2+6xy, \quad g_2(x,y,z) = 2xz+x^2-ye^{xz}.$$

(a) Bestäm rikningsderivatan för g_1 i punkten $(1,-1)$ och i riktning mot $(2,4)$. Bestäm också ekvationen för tangentplanet till ytan $z = g_1(x,y)$ i punkten $(1,-1,9)$. (2p)

(b) Bestäm Taylorpolynomet $P(h,k)$ av grad 2 för f_2 i punkten $(1,1)$. (1.5p)

(c) Förklara varför ekvationen $g_2(x,y,z) = 3$ implicit definierar z som en funktion av x och y, säg $z = h(x,y)$, i en omgivning av $(2,1,0)$. Bestäm h_x, h_y och h_{xx} i punkten $(2,1)$. (3.5p)

(d) Låt $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara fälten som ges av $\mathbf{F} = (f_1, f_2)$, $\mathbf{G} = (g_1, g_2^*)$, där $g_2^*(x,y) = g_2(x,y,0)$. (3p)
Bestäm Jacobimatrisen i punkten $(1,1)$ för sammansättningen $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ och beräkna därmed en approximation för $(\mathbf{G} \circ \mathbf{F}) \begin{bmatrix} 1.01 \\ 0.98 \end{bmatrix}$.

(e) Motivera varför f_1 måste anta både ett största och minsta värde på nivåkurvan $g_1(x,y) = 1$. Bestäm sedan dessa värden. (3.5p)

Var god vänd!

2. (a) Bestäm (2.5p)

$$\int_0^1 \int_x^1 \frac{\sqrt{y}}{x^2 + y^2}\, dy\, dx.$$

(b) Bestäm arean av området i första kvadranten som innesluts av de fyra kurvorna (2.5p)

$$xy = 1, \quad xy = 4, \quad y = x, \quad y = 2x.$$

(c) Bestäm (2.5p)

$$\iiint_T \frac{dV}{1 + (x + y + z)^3}, \quad \text{där } T = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\, y \geq 0,\, z \geq 0,\, x + y + z \leq 2\}.$$

3. Låt den orienterade kurvan γ och vektorfältet $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges respektivt av (3p)

$$\gamma = \left\{\mathbf{r}(t) = \left(\arctan\left(\frac{t^2 + t}{2}\right),\, t,\, t\right) : 0 \leq t \leq 1\right\},$$
$$\mathbf{F}(x,\, y,\, z) = \left(2x \sin(\pi y) - e^z,\, \pi x^2 \cos(\pi y) - 3e^z,\, -xe^z\right).$$

Bestäm $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

4. Låt D vara området i planet som begränsas av de två kurvorna $y = x^2$ och $y = \sqrt{x}$.

(a) Bestäm (4p)

$$\oint_{\partial D} (x^4 - xy)\, dx + (xy - y^2)\, dy,$$

i. med Greens sats

ii. utan Greens sats.

(b) Bestäm längden av ∂D. (2p)

5. Låt $\mathcal{S}_1$ vara ytan $z = x^2 + y^2$ och $\mathcal{S}_2$ vara ytan $z = 4 - x^2 - y^2$. Låt K vara kroppen som innesluts av $\mathcal{S}_1$ och $\mathcal{S}_2$, och låt Y_1, Y_2 vara de delarna av de respektive ytorna som utgör randen ∂K.

Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara fältet

$$\mathbf{F}(x,\, y,\, z) = (xz,\, y^2 + xy,\, z - 1).$$

(a) Använd Gauss sats för att beräkna flödet av $\mathbf{F}$ ut ur K. (2.5p)

(b) Beräkna andelen av flödet som är genom Y_1. (2.5p)

6. (a) Formulera Stokes sats och bevisa den under förutsättningen att ytstycket hör till en C^2-funktionsyta $z = f(x,\, y)$. (5p)

(Obs! Du behöver inte definiera termer som uppstår i satsens formulering).

(b) Definiera vad som menas med att en delmängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ är *enkelt sammanhängande*. (1p)

Var god vänd!

7. Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vara en funktion.

(a) Definiera vad som menas med att f är *differentierbar* i en punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. (1p)

(b) Bevisa att om $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, då är f differentierbar i varje punkt. (Obs! För full poäng räcker det att formulera beviset för $n = 2$). (5p)

8. Beräkna (4p)

$$\int_0^1 \frac{dx}{(4 - x^2)^2}.$$

Go n'eirí an bóthar libh!

Lösningar Flervariabelanalys F/TM, 190316

1. (a)

$$g_{1,x} = 10x + 6y \overset{(1,-1)}{=} 4,$$
$$g_{1,y} = 20y + 6x \overset{(1,-1)}{=} -14.$$

Så tangentplanets ekvation lyder

$$4(x-1) - 14(y-(-1)) - (z-9) = 0 \;\Rightarrow\; 4x - 14y - z = 9.$$

En riktningsvektor ges av $\mathbf{u} = (2,\,4) - (1,\,-1) = (1,\,5)$ så en enhetsvektor i den riktningen ges av $\hat{\mathbf{u}} = (1,\,5)/\sqrt{1^2+5^2} = (1,\,5)/\sqrt{26}$. Riktningsderivatan ges då av

$$g_{1,\mathbf{u}} = \nabla g_1 \cdot \hat{\mathbf{u}} = (4,\,-14)\cdot\frac{(1,\,5)}{\sqrt{26}} = -\frac{66}{\sqrt{26}}.$$

(b)

$$\begin{aligned}
f_2(1,\,1) &= 2,\\
f_{2,x} &= 3x^2y^2 - \frac{y^3}{x^2} \overset{(1,1)}{=} 2,\\
f_{2,y} &= 2yx^3 + \frac{3y^2}{x} \overset{(1,1)}{=} 5,\\
f_{2,xx} &= 6xy^2 + \frac{2y^3}{x} \overset{(1,1)}{=} 8,\\
f_{2,xy} &= 6x^2y - \frac{3y^2}{x^2} \overset{(1,1)}{=} 3,\\
f_{2,yy} &= 2x^3 + \frac{6y}{x} \overset{(1,1)}{=} 8.
\end{aligned}$$

Således ges Taylorpolynomet av grad två i $(1,\,1)$ av

$$P(h,\,k) = 2 + (2h+5k) + \frac{1}{2}(8h^2 + 6hk + 8k^2) = 2 + 2h + 5k + 4h^2 + 3hk + 4k^2.$$

(c)

$$g_{2,x} = 2z + 2x - yze^{xz} \overset{(2,1,0)}{=} 4, \tag{1}$$
$$g_{2,y} = -e^{xz} \overset{(2,1,0)}{=} -1,$$
$$g_{2,z} = 2x - xye^{xz} \overset{(2,1,0)}{=} 2. \tag{2}$$

Eftersom $g_{2,z}(2,\,1,\,0) \neq 0$ så är z en implicit funktion av x och y i en omgivning. Dessutom enligt Implicita Funktionssatsen gäller i punkten $(2,\,1)$ att

$$h_x = -\frac{g_{2,x}}{g_{2,z}} = -2, \quad h_y = -\frac{g_{2,y}}{g_{2,z}} = \frac{1}{2}.$$

Sedan har vi

$$h_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{g_{2,x}}{g_{2,z}}\right) = \frac{-g_{2,z}\frac{\partial g_{2,x}}{\partial x} + g_{2,x}\frac{\partial g_{2,z}}{\partial x}}{(g_{2,z})^2} =$$
$$\overset{(2,1,0)}{=} \frac{-2\frac{\partial g_{2,x}}{\partial x} + 4\frac{\partial g_{2,z}}{\partial x}}{2^2} = \frac{\partial g_{2,z}}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{2,x}}{\partial x}.$$

Från (1) och (2) härleder vi:

$$\frac{\partial g_{2,z}}{\partial x} = 2 - ye^{xz}[1 + x(z + xh_x)] \overset{(2,1,0)}{=} \cdots = 9,$$
$$\frac{\partial g_{2,x}}{\partial x} = 2h_x + 2 - ye^{xz}[h_x + z(z + xh_x)] \overset{(2,1,0)}{=} \cdots = 0.$$

Så $h_{xx}(2,\,1) = 9$.

(d) För det första, $g_2^*(x,\, y) = g_2(x,\, y,\, 0) = x^2 - y$. För det andra,

$$\mathbf{F}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(1,\, 1) \\ f_2(1,\, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$
$$(\mathbf{G} \circ \mathbf{F})\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{G}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(2,\, 2) \\ g_2^*(2,\, 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

För det tredje,

$$D\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{1,\,x} & f_{1,\,y} \\ f_{2,\,x} & f_{2,\,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 3x^2y^2 - \frac{y^3}{x^2} & 2yx^3 + \frac{3y^2}{x} \end{bmatrix} \overset{(1,\,1)}{=} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix},$$
$$D\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{1,\,x} & g_{1,\,y} \\ g_{2,\,x}^* & g_{2,\,y}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10x + 6y & 20y + 6x \\ 2x & -1 \end{bmatrix} \overset{(2,\,2)}{=} \begin{bmatrix} 32 & 52 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

För det fjärde, enligt kedjeregeln,

$$D(\mathbf{G} \circ \mathbf{F})\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 52 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 168 & 324 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Och slutligen,

$$(\mathbf{G} \circ \mathbf{F})\begin{bmatrix} 1.01 \\ 0.98 \end{bmatrix} \approx (\mathbf{G} \circ \mathbf{F})\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + D(\mathbf{G} \circ \mathbf{F})\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.02 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 84 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 168 & 324 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.02 \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} 79.2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(e) $g_1 = 1$ definierar en sned ellips. Man kan också se direkt att mängden av punkter som uppfyller detta är begränsad, t.ex.

$$5x^2+10y^2+6xy = 1 \Rightarrow (3x^2+3y^2+6xy)+(2x^2+7y^2) = 1 \Rightarrow 3(x+y)^2+2x^2+7y^2 = 1 \Rightarrow 2x^2+7y^2 \leq 1.$$

Hur som helst så definierar $g_1 = 1$ en sluten och begränsad, dvs kompakt mängd, och därför måste den (uppenbart) kontinuerliga funktionen f_1 anta både ett största och minsta värde. Vi kan köra Lagranges metod och få ekvationssystemet

$$f_{1,\,x} = \lambda g_{1,\,x} \Rightarrow 2x = \lambda(10x + 6y), \tag{3}$$
$$f_{1,\,y} = \lambda g_{1,\,y} \Rightarrow 2y = \lambda(20y + 6x), \tag{4}$$
$$g_1 = 1 \Rightarrow 5x^2 + 10y^2 + 6xy = 1. \tag{5}$$

Det är lätt att se att om λ inte kan elimineras från (3) och (4) så måste $(x,\, y) = (0,\, 0)$, vilket inte uppfyller bivillkoret (5). Eliminering av λ från (3) och (4) ger

$$\lambda = \frac{2x}{10x + 6y} = \frac{2y}{20y + 6x} \Rightarrow 2x(20y + 6x) = 2y(10x + 6y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 20xy = 12(y^2 - x^2) \Rightarrow 6xy = \frac{18}{5}(y^2 - x^2) \overset{(5)}{\Rightarrow} 1 = \frac{7}{5}x^2 + \frac{68}{5}y^2.$$

Detta är ekvationen för en "vanlig" ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, med $a = \sqrt{5/7}$, $b = \sqrt{5/68}$. Notera att f_1 mäter avstånd från origo i kvadrat. Så max och min värdena för f_1 under bivillkoret måste vara $a^2 = 5/7$ resp. $b^2 = 5/68$.

2. (a) Man ska byta ordningen i den itererade integralen:

$$\int_0^1 \sqrt{y}\, dy \int_0^y \frac{dx}{x^2 + y^2} = \int_0^1 \sqrt{y}\, dy \left[\frac{1}{y} \arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right]_{x=0}^{x=y} =$$
$$= \int_0^1 \sqrt{y}\, dy\, \frac{1}{y}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{4}\int_0^1 y^{-1/2}\, dy = \cdots = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Byt variabler till $u = xy$, $v = y/x$ sådan att området i uv-planet blir den axelparallella rektangeln $\{(u, v) : 1 \le u \le 4,\ 1 \le v \le 2\}$. Vi har

$$\frac{d(u, v)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2\frac{y}{x} = 2v.$$

Så arean blir

$$\iint_D dx\,dy = \int_1^2 \int_1^4 \frac{d(x, y)}{d(u, v)}\,du\,dv = \int_1^2 \int_1^4 \frac{1}{\frac{d(u,v)}{d(x,y)}}\,du\,dv =$$

$$= \int_1^2 \int_1^4 \frac{1}{2v}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_1^4 du \int_1^2 \frac{dv}{v} = \cdots = \frac{3}{2}\ln 2.$$

(c) Integranden kan skrivas $h(g(x, y, z))$, där $g(x, y, z) = x + y + z$ och $h(u) = \frac{1}{1+u^3}$. Därför blir integralen

$$\int_0^2 h(u)V'(u)\,du, \quad \text{där } V(u) = \text{vol}\{(x, y, z) : x, y, z \ge 0,\ x + y + z \le u\}.$$

Man kan visa att $V(u) = u^3/6$ (området är en tetraheder). Så vi får

$$\int_0^2 \frac{u^2}{2(1+u^3)}\,du \overset{v=1+u^3}{=} \frac{1}{6}\int_1^9 \frac{dv}{v} = \frac{\ln 3}{3}.$$

3. $\mathbf{F}$ är “nästan” konservativt. Mer precis, om vi låter

$$\phi(x, y, z) = x^2\sin(\pi y) - xe^z - 3ye^z,$$

då är $\mathbf{F} = \nabla\phi + (0, 0, 3ye^z)$. Kurvan börjar i $(0, 0, 0)$ och slutar i $\left(\frac{\pi}{4}, 1, 1\right)$. Så

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \phi\left(\frac{\pi}{4}, 1, 1\right) - \phi(0, 0, 0) + \int_\gamma (0, 0, 3ye^z)\cdot d\mathbf{r} = -e\left(\frac{\pi}{4} + 3\right) + \int_\gamma (0, 0, 3ye^z)\cdot d\mathbf{r}.$$

Vi kan beräkna den sista kurvintegralen med den givna parametriseringen ty den jobbiga x-termen däri kommer att försvinna. Vi har alltså

$$\int_\gamma (0, 0, 3ye^z)\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (0, 0, 3te^t)\cdot(-, 1, 1)\,dt = \int_0^1 3te^t\,dt = \cdots = 3.$$

Svar: $3 - e\left(\frac{\pi}{4} + 3\right)$.

4. (a) i. Enligt Greens sats så är kurvintegralen lika med dubbelintegralen

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(xy - y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^4 - xy)\right] dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (y + x)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 dx \left[\frac{y^2}{2} + xy\right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} = \int_0^1 dx\left[\frac{x}{2} + x^{3/2} - \frac{x^4}{2} - x^3\right] =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{4} = \frac{3}{10}.$$

ii. $\partial D = \gamma_1 - \gamma_2$, där $\gamma_1 = \{(x, x^2) : 0 \le x \le 1\}$ och $\gamma_2 = \{(x, \sqrt{x}) : 0 \le x \le 1\}$, så $\oint_{\partial D} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_{\gamma_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$. Då har vi

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (x^4 - x^3)\,dx + (x^3 - x^4)\,2x\,dx = \cdots = \frac{1}{60},$$

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (x^4 - x^{3/2})\,dx + (x^{3/2} - x)\,\frac{dx}{2\sqrt{x}} = \cdots = -\frac{17}{60}.$$

Så sammanlagt får vi $\frac{1}{60} - \left(-\frac{17}{60}\right) = \frac{18}{60} = \frac{3}{10}$, v.s.v.

(b) γ_1 och γ_2 är varandras spegelbild i linjen $y = x$, så dessa har samma längd. Så

$$||\partial D|| = 2||\gamma_1|| = 2\int_0^1 \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\, dx = 2\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx =$$

$$\overset{u=2x}{=} \int_0^2 \sqrt{1 + u^2}\, du \overset{\text{formelblad}}{=} \frac{1}{2}[u\sqrt{1 + u^2} + \ln(u + \sqrt{1 + u^2})]_0^2 = \cdots = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2 + \sqrt{5}).$$

5. (a) Först har vi

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + xy) + \frac{\partial}{\partial z}(z - 1) = z + 2y + x + 1.$$

Enligt Gauss sats så ges flödet ut ur K av

$$\iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iiint_K (z + 2y + x + 1)\, dV = \iiint_K (z + 1)\, dV,$$

ty integralerna för y och x blir noll av symmetriskäl. Ytorna $\mathcal{S}_1$ och $\mathcal{S}_2$ möts då $z = x^2 + y^2 = 4 - x^2 - y^2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$, där $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ är den polära radien. Således blir flödet

$$\iint_{x^2+y^2\leq 2} dx\, dy \int_{x^2+y^2}^{4-x^2-y^2} (z + 1)\, dz = \iint_{x^2+y^2\leq 2} \left[\frac{z^2}{2} + z\right]_{z=x^2+y^2}^{z=4-x^2-y^2} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r\, dr \left[\frac{(4 - r^2)^2}{2} + (4 - r^2) - \frac{r^4}{2} - r^2\right] = \cdots = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r\, dr\, (12 - 6r^2) = \cdots = 12\pi.$$

(b) Y_1 hör till funktionsytan $z = f(x, y)$, där $f(x, y) = x^2 + y^2$. Så

$$\hat{\mathbf{N}}\, dS = \pm(-f_x,\, -f_y,\, 1)\, dx\, dy = \pm(-2x,\, -2y,\, 1)\, dx\, dy.$$

Vi söker flödet *ut* genom ytan, vilket är samma sak som flödet *ner*. Så vi väljer

$$\hat{\mathbf{N}}\, dS = (2x,\, 2y,\, -1)\, dx\, dy$$

vilket innebär att

$$\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = (xz,\, y^2 + xy,\, z - 1) \cdot (2x,\, 2y,\, -1)\, dx\, dy = (2x^2z + 2y^3 + 2xy^2 + 1 - z)\, dx\, dy =$$

$$\overset{z=x^2+y^2}{=} (2x^4 + 2x^2y^2 + 2y^3 + 2xy^2 + 1 - x^2 - y^2)\, dx\, dy.$$

Flödet ut genom Y_1 ges därmed av

$$\iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_{x^2+y^2\leq 2} (2x^4 + 2x^2y^2 + 2y^3 + 2xy^2 + 1 - x^2 - y^2)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leq 2} (2x^4 + 2x^2y^2 + 1 - 2x^2)\, dx\, dy,$$

ty $\iint y^3 = \iint xy^2 = 0$ och $\iint x^2 = \iint y^2$ av symmetriskäl,

$$= \iint_{x^2+y^2\leq 2} dx\, dy + 2\iint_{x^2+y^2\leq 2} [x^2(x^2 + y^2 - 1)]\, dx\, dy =$$

$$= 2\pi + 2\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^2(r^2 - 1) r\, dr = \cdots = \frac{8\pi}{3}.$$

Så andelen av flödet som är genom Y_1 är $\frac{8\pi/3}{12\pi} = 2/9$.

6. (a) Sats 10.3.2 i boken.

(b) Ω är bågvis sammanhängande och varje enkel, sluten kurva i Ω kan kontinuerligt kontraheras till en punkt utan att lämna Ω.

7. (a) Det finns konstanter $A_1, \ldots, A_n$ och en funktion $\rho(h_1, \ldots, h_n)$ sådana att

$$f(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n) = f(a_1, \ldots, a_n) + \sum_{i=1}^{n} A_i h_i + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_i^2}\, \rho(h_1, \ldots, h_n),$$

och $\rho(h_1, \ldots, h_n) \to 0$ då $(h_1, \ldots, h_n) \to (0, \ldots, 0)$.

(b) Sats 2.2.3 i boken.

8. Betrakta

$$F(s) = \int_0^1 \frac{dx}{s^2 - x^2}.$$

Det är klart att $F(s)$ är definierat för $|s| > 1$. Å ena sidan kan vi derivera under integraltecknet och få

$$F'(s) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{s^2 - x^2} \right) dx = -2s \int_0^1 \frac{dx}{(s^2 - x^2)^2}. \tag{6}$$

Å andra sidan, eftersom

$$\frac{1}{s^2 - x^2} = \frac{1}{(s+x)(s-x)} = \frac{1}{2s} \left(\frac{1}{s+x} + \frac{1}{s-x} \right)$$

så har vi att

$$F(s) = \frac{1}{2s} \int_0^1 \left(\frac{dx}{s+x} + \frac{dx}{s-x} \right) = \frac{1}{2s} [\ln(s+x) - \ln(s-x)]_{x=0}^{x=1} = \frac{\ln(s+1) - \ln(s-1)}{2s},$$

vilket i sin tur innebär att

$$F'(s) = \frac{2s \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1} \right) - 2[\ln(s+1) - \ln(s-1)]}{4s^2}. \tag{7}$$

Från (6) och (7) erhåller vi att, för $|s| > 1$,

$$\int_0^1 \frac{dx}{(s^2 - x^2)^2} = \frac{\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s}[\ln(s+1) - \ln(s-1)]}{4s^2}$$

Sätt $s = 2$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(4 - x^2)^2} = \cdots = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{3} + \frac{\ln 3}{4} \right).$$