Tentamen
MVE035/6 Flervariabelanalys F/TM

2019-06-10 kl. MVE035: 08.30–12.30, MVE036: 09.30 - 13.30

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Peter Hegarty, telefon: 070-5705475

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs 20 poäng, inklusive eventuella bonuspoäng erhållna under VT-2019 från Möbius uppgifterna och Matlab. Preliminärt så krävs 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand. För slutbetyg krävs godkänt på tavelmomentet, samt för TM-studenterna godkänt på extra-vektoranalys momentet.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida direkt efter tentan. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas i Ladok senast den 2 juli. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan och via Ping Pong, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.
Dessutom granskning alla vardagar utom onsdagar 11-13, MV:s studieexpedition.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak tillvägagångssätten och motiveringarna som ger poäng, inte svaren.
I de uppgifter som består av fler olika delar går det alltid att lösa de enskilda delarna oberoende av varandra, även om man kan ibland spara räknetid genom att lösa deluppgifterna sekventiellt.

Uppgifterna

1. Låt $f(x, y) = e^{x^2-y}$.

(a) Bestäm rikningsderivatan för f i punkten $(1, 1)$ och i riktning mot punkten $(3, -2)$. (1.5p)

(b) Bestäm Taylorpolynomet $P(h, k)$ av grad 2 för f i punkten $(1, 1)$ och därmed en uppskattning för $f(1.01, 0.97)$. (1.5p)

2. Låt $f(x, y) = xy$ och $g(x, y) = x^4 + x^2y^2 + y^4$. Motivera varför f måste anta både ett största och minsta värde under bivillkoret $g(x, y) = 12$. Bestäm sedan dessa värden. (4p)

3. (a) Med hjälp av variabelbytet $u = xy^2$, $v = y$ (eller på något annat vis) bestäm den allmänna lösningen till PDE:n (4p)

$$2xf_x - yf_y = y + xy, \quad x > 0,\ y > 0,$$

samt den entydiga lösningen som uppfyller $f(1, y) = e^{-y}\ \forall\, y > 0$.

(b) Skriv f_{yy} i termer av u, v och f's partiella derivator med avseende på u och v. (Obs! $f \in C^2$ får antas). (2p)

Var god vänd!

4. (a) Bestäm (2.5p)

$$\iint_D (3x^2 + 2xy - y^2)\, dx\, dy,$$

där D är parallellogrammet i $\mathbb{R}^2$ som begränsas av de fyra linjerna $x+y=1$, $x+y=3$, $3x-y=2$, $3x-y=4$.

(b) Bestäm (2.5p)

$$\iiint_D \frac{\sin z}{z}\, dx\, dy\, dz,$$

där $D = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

(c) Låt

$$K = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z,\ 1 \leq z \leq 2\}.$$

i. Skissa kroppen K. (1p)

ii. Bestäm volymen av K. (2p)

5. (a) Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges av (2.5p)

$$\mathbf{F}(x,\, y) = \left(7 \sin^6 x \cos x + 3y^2 + x^5,\ 2x - 7y^6 e^{y^7} + y\right).$$

Använd Greens sats för att bestämma $\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där γ är triangeln med hörn i $(0,\,0)$, $(3,\,0)$ och $(1,\,2)$, genomlöpt *medurs*.

(b) Definiera vad som menas med att ett n-dimensionellt vektorfält $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är *konservativt*. (1p)

(c) Bestäm kurvintegralen i del (a) *utan* Greens sats, dvs via direkt parametrisering av de olika linjestycken, genom att först skriva $\mathbf{F} = \mathbf{G} - \mathbf{H}$, där $\mathbf{G}$ är konservativt och $\mathbf{H}$ är "mycket enklare" än $\mathbf{F}$. (3p)

6. (a) Låt K vara den begränsade kropp i $\mathbb{R}^3$ som avgränsas av ytorna $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ och $3z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$. Beräkna flödet in i K av vektorfältet (3p)

$$\mathbf{F}(x,\, y,\, z) = (-xy^2 + e^{\sin(-z^3 - y^2 z)},\ 2yz^2 + \ln(1 + z^2),\ -z^3 - x^2 z).$$

(b) Vad är då flödet ut ur K av vektorfältet $\mathbf{G} = (x^3,\, y^3,\, z^3)$? (1p)

(c) Låt $\mathbf{H} = (x^2,\, y^2,\, z^2)$. Beräkna flödet av $\mathbf{H}$ ut genom den del av ∂K som tillhör sfären. (3p)

7. (a) Formulera Stokes sats och bevisa den under förutsättningen att ytstycket hör till en C^2-funktionsyta $z = f(x,\, y)$. (5p)

(Obs! Du behöver inte definiera termer som uppstår i satsens formulering).

(b) Definiera vad som menas med att ett vektorfält $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är *källfritt* respektivt *virvelfritt*. (1p)

Var god vänd!

8. Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en funktion.

(a) Definiera vad som menas med att f tillhör klassen $C^2(\mathbb{R}^2)$. (1p)

(b) Bevisa att om $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, då är (5p)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x}(a, b) \quad \forall \, (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

9. För $u > 0$ och $n \in \mathbb{N}$, låt $T_{n,u}$ vara den "n-dimensionella tetrahedern" (3.5p)

$$T_{n,u} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \; \forall \, i, \; \sum_{i=1}^{n} x_i \leq u\}.$$

Bevisa att $\mathrm{vol}(T_{n,u}) = \frac{u^n}{n!}$.

Go n'eirí an bóthar libh!

Lösningar Flervariabelanalys F/TM, 190610

1. (a) Vi har

$$f_x = 2xe^{x^2-y} \overset{(1,1)}{=} 2,$$
$$f_y = -e^{x^2-y} \overset{(1,1)}{=} -1,$$

så $\nabla f(1,\,1) = (2,\,-1)$. En riktningsvektor ges av $\mathbf{v} = (3,\,-2) - (1,\,1) = (2,\,-3)$ så en normaliserad riktningsvektor ges av $\hat{\mathbf{v}} = \frac{(2,\,-3)}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{(2,\,-3)}{\sqrt{13}}$. Rikningsderivatan ges därmed av

$$\nabla f \cdot \hat{\mathbf{v}} = \frac{(2,\,-1)\cdot(2,\,-3)}{\sqrt{13}} = \cdots = \frac{7}{\sqrt{13}}.$$

(b) Vidare partiell derivering ger

$$f_{xx} = (2+4x^2)e^{x^2-y} \overset{(1,1)}{=} 6,$$
$$f_{yy} = e^{x^2-y} \overset{(1,1)}{=} 1,$$
$$f_{xy} = -2xe^{x^2-y} \overset{(1,1)}{=} -2.$$

Notera också att $f(1,\,1) = 1$. Således ges Taylorpolynomet av grad två i $(1,\,1)$ av

$$P(h,\,k) = 1 + (2h-k) + \frac{1}{2}(6h^2 - 4hk + k^2) = 1 + 2h - k + 3h^2 - 2hk + \frac{k^2}{2}.$$

Om vi sätter $h = 0.01$, $k = -0.03$ så får vi uppskattningen

$$f(1.01,\,0.97) \approx 1 + 2(0.01) - (-0.03) + 3(0.01)^2 - 2(0.01)(-0.03) + \frac{(-0.03)^2}{2} = \cdots = 1.05135.$$

2. Konstatera att var och en av x^4, y^4, x^2 och y^2 är icke-negativt för alla x och y. Således måste både x och y vara begränsade om $x^4+x^2y^2+y^4 = 12$ ska gälla. Därmed definierar $g(x,\,y) = 12$ en begränsad och sluten, dvs kompakt kurva i planet. Eftersom f är kontinuerlig så måste den anta både ett största och minsta värde på kurvan.

För att hitta dessa värden kör vi Lagranges metod.

$$f_x = \lambda g_x \Rightarrow y = \lambda(4x^3 + 2xy^2), \tag{1}$$
$$f_y = \lambda g_y \Rightarrow x = \lambda(4y^3 + 2x^2y), \tag{2}$$
$$g = 12 \Rightarrow x^4 + x^2y^2 + x^4 = 12. \tag{3}$$

Detta ger två alternativ:

Fall 1: $\lambda = 0$. I så fall är $x = y = 0$ enligt (1) och (2), men $(0,\,0)$ uppfyller ej (3).

Fall 2: $\lambda \neq 0$. Vi kan då kancellera λ från (1) och (2) enligt

$$\lambda = \frac{y}{4x^3 + 2xy^2} = \frac{x}{4y^3 + 2x^2y} \Rightarrow \cdots \Rightarrow x^4 = y^4 \Rightarrow x = \pm y.$$

Insättning in i (3) ger $x^4 = 4$, så $x = \pm y = \pm\sqrt{2}$ och $f(x,\,y) = \pm 2$. Dessa är extremvärdena.

3. (a) Enligt kedjeregeln har vi

$$f_x = f_u u_x + f_v v_x = y^2 f_u + 0 \cdot f_v = y^2 f_u,$$
$$f_y = f_u u_y + f_v v_y = 2xy f_u + f_v.$$

Insättning i den givna PDE:n ger

$$2x(y^2 f_u) - y(2xyf_u + f_v) = y + xy$$
$$\Rightarrow -yf_v = y(1+x).$$

Eftersom $y > 0$ antas så kan vi förkorta och ¨

$$f_v = -(1 + x).$$

Innan vi integrerar måste HL skrivas i termer av u och v. Konstatera att $x = u/y^2 = u/v^2$. Således har vi

$$f_v = -\left(1 + \frac{u}{v^2}\right) \Rightarrow f(u,\, v) = -\left(v - \frac{u}{v}\right) + \phi(u),$$

där ϕ är en valfri deriverbar funktion av en variabel. Detta är den allmänna lösningen, vilket i termer av x och y lyder

$$f(x,\, y) = xy - y + \phi(xy^2).$$

Om nu $f(1,\, y) = e^{-y}$ så får vi $e^{-y} = \phi(y^2)$, dvs $\phi(t) = e^{-\sqrt{t}}$ för alla $t > 0$. Således får vi den entydiga lösningen

$$f(x,\, y) = xy - y + e^{-y\sqrt{x}} \quad \forall\, x > 0,\, y > 0.$$

(b) Ovan hade vi redan $f_y = 2xyf_u + f_v$. I termer av u och v har vi $2xy = u_y = \frac{2u}{v}$. Därmed är

$$f_y = \frac{2u}{v} f_u + f_v$$

och en till tillämpning av kedjeregeln (kom ihåg att $u_y = 2xy = \frac{2u}{v}$, $v_y = 1$), plus produktregeln, ger

$$\begin{aligned} f_{yy} &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{2u}{v} f_u + f_v\right) \cdot \frac{2u}{v} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2u}{v} f_u + f_v\right) \cdot 1 = \\ &= \frac{2u}{v} \cdot \left(\frac{2u}{v} f_{uu} + \frac{2}{v} f_u + f_{uv}\right) + \left(\frac{2u}{v} f_{uv} - \frac{2u}{v^2} f_u + f_{vv}\right) = \\ &= \cdots = \frac{4u^2}{v^2} f_{uu} + \frac{4u}{v} f_{uv} + f_{vv} + \frac{2u}{v^2} f_u. \end{aligned}$$

4. (a) Vi byter variabler till $u = x + y$, $v = 3x - y$. Notera först att $3x^2 + 2xy - y^2 = (x + y)(3x - y) = uv$. Sedan har vi

$$\frac{d(u,\, v)}{d(x,\, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

och därmed

$$dx\, dy = \left|\frac{d(x,\, y)}{d(u,\, v)}\right| du\, dv = \frac{1}{4}\, du\, dv.$$

Således blir dubbelintegralen

$$\int_2^4 \int_1^3 \frac{uv}{4}\, du\, dv = \cdots = 6.$$

(b) Notera att i cylindriska koordinater $(r,\, \theta,\, z)$ ges D av

$$D = \{(r,\, \theta,\, z) : 0 \le \theta \le 2\pi,\, 0 \le z \le 1,\, 0 \le r \le z\}.$$

Därmed får vi följande itererad integral i cylindriska koordinater:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{\sin z}{z}\, dz \int_0^z r\, dr = \pi \int_0^1 z \sin z\, dz = \pi[-z\cos z + \sin z]_0^1 = \cdots = \pi(\sin 1 - \cos 1).$$

(c) Notera att $z = x^2 + y^2$ är en paraboloid medan att $z = 1$ och $z = 2$ är två parallella plan. Kroppen K avgränsas av dessa tre ytor, se Figur 1. Vi kan beräkna volymen enligt

$$\text{vol}(K) = \iiint_K dx\, dxy\, dz = \int_1^2 dz \iint_{x^2+y^2 \le z} dx\, dy = \int_1^2 \pi z\, dz = \cdots = \frac{3\pi}{2}.$$

5. (a) Låt T vara insidan av triangeln. Eftersom vi ska följa randen *medurs* så gäller enligt Greens sats att

$$\oint_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\iint_T \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_T (6y-2)\,dx\,dy =$$
$$\int_0^2 dy \int_{y/2}^{3-y} (6y-2)\,dx = \int_0^2 dy[6xy-2x]_{y/2}^{3-y} =$$
$$= \cdots = \int_0^2 (-6+21y-9y^2)dy = \cdots = 6.$$

(b) $\mathbf{F}$ sägs vara konservativt om det finns ett skalärfält $U:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ sådant att $\mathbf{F}=\nabla U$.

(c) Om man tar

$$U(x,\,y) = \sin^7 x + \frac{x^6}{6} - e^{y^7} + \frac{y^2}{2} + 3xy^2 + 2xy$$

då är det lätt att kontrollera att $\nabla U = \mathbf{F} + (2y,\,6xy)$. Så vi sätter $\mathbf{G} = \nabla U$ och $\mathbf{H} = (2y,\,6xy)$. Eftersom $\mathbf{G}$ är konservativt så gäller att

$$\oint_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\oint_\gamma \mathbf{H}\cdot d\mathbf{r} = \oint_{\gamma'} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{r} = \oint_{\gamma'} 2y\,dx + 6xy\,dy,$$

där γ' är samma som γ fast genomlöpt moturs. Det är naturligt att göra en uppdelning $\gamma' = \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$ och beräkna kurvintegralerna separat.

För det första har vi $\gamma_1 = \{(x,\,0) : 0\le x\le 3\}$. Eftersom $y=0$ hela vägen så är $\int_{\gamma_1}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{r} = 0$.

För det andra har vi $\gamma_2 = \{(3-y,\,y) : 0\le y\le 2\}$. Så

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 2y(-dy) + 6(3-y)y\,dy = \int_0^2 (16y-6y^2)\,dy = \cdots = 16.$$

För det tredje har vi $\gamma_3 = \{(x,\,2x) : 1\ge x\ge 0\}$. Så

$$\int_{\gamma_3} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{r} = \int_1^0 2(2x)\,dx + 6x(2x)(2\,dx) = -\int_0^1 (4x+24x^2)\,dx = \cdots = -10.$$

Så slutligen har vi

$$\oint_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_{\gamma'} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3}\int_{\gamma_i} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{r} = 0+16-10 = 6, \quad \text{v.s.v.}$$

Anmärkning: Ett ungefär lika lätt alternativ är att skriva $\mathbf{F} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{H}_1$ där

$$\mathbf{G}_1 = (7\sin^6 x\cos x + x^5,\; -7y^6e^{y^7} + y) = \nabla\left(\sin^7 x + \frac{x^6}{6} - e^{y^7} + \frac{y^2}{2}\right),$$
$$\mathbf{H}_1 = (3y^2,\,2x).$$

6. (a) Vi söker flödet *inåt* så enligt Gauss sats gäller

$$\text{Flöde in} = -\iiint_K \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = -\iiint_K \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dV =$$
$$= -\iiint_K (-y^2+2z^2-3z^2-x^2)\,dV = \iiint_K (x^2+y^2+z^2)\,dV.$$

Nu ska vi byta till sfäriska koordinater $(\rho,\,\theta,\,\phi)$. För att få gränserna för θ notera att på konen $3z^2 = x^2+y^2$ gäller

$$\tan\theta = \frac{r}{z} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Således har vi att

$$\iiint_K (x^2+y^2+z^2)\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^2 \rho^2(\rho^2 \sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\phi) =$$
$$= 2\pi\int_0^{\pi/3}\sin\theta\,d\theta\int_0^2 \rho^4\,d\rho = \cdots = \frac{32\pi}{5}.$$

(b) Konstatera att $\nabla\cdot\mathbf{G} = 3(x^2+y^2+z^2) = -3(\nabla\cdot\mathbf{F})$. Eftersom vi söker flödet ut den här gången så kommer svaret att bli $+3$ gånger svaret från (a), således $\frac{96\pi}{5}$.

(c) På sfären $x^2+y^2+z^2=a^2$ har vi ($\hat{\mathbf{N}}$ är den *utåtgående* enhetsnormalen)

$$dS = a^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi,\quad \hat{\mathbf{N}} = \hat{\rho} = \frac{(x,\,y,\,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{a}(x,\,y,\,z),$$
$$x = a\sin\theta\cos\phi,\quad y = a\sin\theta\sin\phi,\quad z = a\cos\theta.$$

I vårt fall är $a=2$ och vi vill integrera över stycket $0\le\theta\le\pi/3$, $0\le\phi\le 2\pi$. Således blir

$$\iint_Y \mathbf{H}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}(x^2,\,y^2,\,z^2)\cdot(x,\,y,\,z)\sin\theta\,d\theta\,d\phi = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}(x^3+y^3+z^3)\sin\theta\,d\theta\,d\phi.$$

Notera att integralena av både x^3 och y^3 blir noll av symmetriskäl (ytstycket Y är symmetriskt kring z-axeln). Vi har kvar

$$2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} z^3\,d\theta d\phi = 16\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\cos^3\theta\sin\theta\,d\theta\,d\phi = 32\pi\int_0^{\pi/3}\cos^3\theta\sin\theta\,d\theta$$
$$\overset{u=\cos\theta}{=} 32\pi\int_{1/2}^1 u^3\,du = \cdots = \frac{15\pi}{2}.$$

ANMÄRKNING: Ett alternativ är att beräkna enligt

$$\iint_Y \mathbf{H}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_{K_1}\nabla\cdot\mathbf{H}\,dV - \iint_{Y_1}\mathbf{H}\cdot(0,\,0,\,-1)\,dS$$

där K_1 är den del av K som ligger mellan sfären och planet $z=1$ och Y_1 är den del av samma plan som ligger inuti sfären. När det gäller integralen över K_1, notera att $\nabla\cdot\mathbf{H} = 2(x+y+z)$ och att integralerna av både x och y blir noll av symmetriskäl. Notera dessutom att Y_1 är en cirkelskiva av radie $\sqrt{3}$ och att $\mathbf{H}\cdot(0,\,0,\,-1) = -z^2 = -1$ i planet så att $\iint_{Y_1}\mathbf{H}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = -3\pi$. Så efter byte till cylindriska koordinater får man att

$$\iint_Y \mathbf{H}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = 3\pi + 2\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 z\,dz\int_0^{\sqrt{4-z^2}} r\,dr = \cdots = 3\pi + \frac{9\pi}{2} = \frac{15\pi}{2}.$$

7. (a) Sats 10.3.2 i boken.

(b) *Källfritt:* $\nabla\cdot\mathbf{F} = 0$. *Virvelfritt:* $\nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

8. (a) f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} alla existerar och är kontinuerliga i hela $\mathbb{R}^2$.

(b) Sats 2.5.9 i boken.

9. Induktion på n.

Basfallet $n=1$: Man ser direkt att

$$\mathrm{vol}(T_{1,u}) = \mathrm{vol}\{x_1\in\mathbb{R} : x_1\ge 0,\, x_1\le u\} = |[0,\,u]| = u = \frac{u^1}{1!},\quad \text{v.s.v.}$$

Induktionssteget: Antag att $\operatorname{vol}(T_{n,\,u}) = \frac{u^n}{n!}$ för alla $u > 0$ och betrakta $T_{n+1,\,u}$. Enligt Fubini kan dess volym skrivas som följande itererad multipelintegral:

$$\operatorname{vol}(T_{n+1,\,u}) = \int_0^u dx_1 \left[\int_0^{u-x_1} dx_2 \int_0^{u-x_1-x_2} dx_3 \ldots \int_0^{u-(x_1+\cdots+x_n)} dx_{n+1} \right].$$

Konstatera att den n-dimensionella integralen inom [...] är just volymen av en $T_{n,\,u-x_1}$, vilket enligt induktionshypotesen är $\frac{(u-x_1)^n}{n!}$. Således får vi

$$\operatorname{vol}(T_{n+1,\,u}) = \int_0^u \frac{(u-x_1)^n}{n!}\, dx_1 \overset{y=u-x_1}{=} \frac{1}{n!} \int_0^u y^n\, dy = \frac{1}{n!} \left(\frac{u^{n+1}}{n+1} \right) = \frac{u^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{v.s.v.}$$