Tentamen
MVE035/6 Flervariabelanalys F/TM

2019-08-27 kl. MVE035: 08.30–12.30, MVE036: 09.30 - 13.30

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Peter Hegarty, telefon: 070-5705475

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs 20 poäng, inklusive eventuella bonuspoäng erhållna under VT-2019 från Möbius uppgifterna och Matlab. Preliminärt så krävs 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand. För slutbetyg krävs godkänt på tavelmomentet, samt för TM-studenterna godkänt på extra-vektoranalys momentet.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida direkt efter tentan. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas i Ladok senast den 17 september. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan och via Ping Pong, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.
Dessutom granskning alla vardagar utom onsdagar 11-13, MV:s studieexpedition.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak tillvägagångssätten och motiveringarna som ger poäng, inte svaren.
I de uppgifter som består av fler olika delar går det alltid att lösa de enskilda delarna oberoende av varandra, även om man kan ibland spara räknetid genom att lösa deluppgifterna sekventiellt.

Uppgifterna

1. Låt

$$f_1(x, y) = x^2+y^3, \qquad f_2(x, y) = xy^4+\frac{x^3}{y}, \quad g_1(x, y) = 2x^2+3y^2-xy, \quad g_2(x, y, z) = ze^{xz}+yz^2.$$

(a) Bestäm rikningsderivatan för g_1 i punkten $(-2, 1)$ och i riktning mot $(1, 3)$. Bestäm också ekvationen för tangentplanet till ytan $z = g_1(x, y)$ i punkten $(-2, 1, 13)$. (2p)

(b) Bestäm Taylorpolynomet $P(h, k)$ av grad 2 för f_2 i punkten $(1, 1)$ och beräkna därmed ett approximativt värde för $f_2(0.97, 1.02)$. (2p)

(c) Förklara varför ekvationen $g_2(x, y, z) = 6$ implicit definierar z som en funktion av x och y, säg $z = h(x, y)$, i en omgivning av $(0, 1, 2)$. Bestäm h_x och h_y i punkten $(0, 1)$. (2p)

(d) Låt $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara fälten som ges av $\mathbf{F} = (f_1, f_2)$, $\mathbf{G} = (g_1, g_2^*)$, där $g_2^*(x, y) = g_2(x, y, 1)$. (2p)
Bestäm $(\mathbf{G} \circ \mathbf{F})(1, 1)$ samt Jacobimatrisen i $(1, 1)$ för $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$.

2. Låt $f(x, y) = x^2y - x \ln y$.

(a) Vad är definitionsmängden till f ? Skriv svaret *precist* som en delmängd i $\mathbb{R}^2$. (0.5p)

(b) Bestäm och klassificera alla kritiska punkter till f. (4p)

(c) Har f ett globalt maximum och/eller minimum i sin definitionsmängd ? Motivera väl ! (1.5p)

Var god vänd!

3. (a) Beräkna den sammanlagda massan hos ett inhomogent föremål som ockuperar området (2.5p)

$$D = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0,\;\; 3(x^2+y^2) \leq z^2 \leq 4 - x^2 - y^2\}$$

och vars densitet varierar enligt

$$\rho(x,\, y,\, z) = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(x^2+y^2+z^2+4)^2}.$$

(b) Bestäm arean av den del av ytan $z = x^2 - y^2$ som bestäms av olikheterna $z \geq 0$ och $x^2 + y^2 \leq 1$. (2.5p)

(c) Bestäm (3p)

$$\iint_T e^{(x-y)/(x+y)}\, dx\, dy,$$

där T är triangeln med hörn i $(0,\, 0)$, $(4,\, 0)$ och $(2,\, 2)$.

4. Låt vektorfältet $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges av

$$\mathbf{F}(x,\, y,\, z) = (e^{yz},\, 2xy - e^z,\, x^2 - z^2).$$

Bestäm flödet av $\mathbf{F}$ upp genom halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$,

(a) med hjälp av Gauss sats (3.5p)

(b) utan Gauss sats, dvs via direkt parametrisering av ytan. (Obs! Här kan det vara behjäpligt att utnyttja symmetrier). (3.5p)

5. (a) Definiera vad som menas med att en funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är *differentierbar* i en punkt $\mathbf{a} = (a_1,\, \ldots,\, a_n)$. (1p)

(b) Formulera och bevisa kedjeregeln för en sammansättning $f \circ \mathbf{g}$, där $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ och $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1,\, \ldots,\, n$, är differentierbara funktioner och $\mathbf{g} = (g_1,\, \ldots,\, g_n)$. (5.5p)

(c) Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ges av (3.5p)

$$f(0,\, 0) = 0, \quad f(x,\, y) = \frac{2x^4 + 3y^4 + x^3}{x^2 + y^2} \quad \forall\, (x,\, y) \neq (0,\, 0).$$

Är f differentierbar i $(0,\, 0)$? Motivera väl !

6. (a) Definiera vad som menas med att en domän $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är *reguljär*. (1.5p)

(b) Formulera och bevisa Greens sats för en reguljär domän i $\mathbb{R}^2$. (5.5p)

7. Sätt (4p)

$$y = f(x) = \int_0^x \sin(x-t)\ln(1+t^2)\, dt.$$

Bevisa att $y'' + y = \ln(1 + x^2)$.

Go n'eirí an bóthar libh!

Lösningar Flervariabelanalys F/TM, 190827

1. (a)

$$g_{1,\,x} = 4x - y \overset{(-2,\,1)}{=} -9,$$
$$g_{1,\,y} = 6y - x \overset{(-2,\,1)}{=} 8.$$

Så tangentplanets ekvation lyder

$$-9(x-(-2)) + 8(y-1) - (z-13) = 0 \;\Rightarrow\; 9x - 8y + z = -13.$$

En riktningsvektor ges av $\mathbf{u} = (1,\,3) - (-2,\,1) = (3,\,2)$ så en enhetsvektor i den riktningen ges av $\hat{\mathbf{u}} = (3,\,2)/\sqrt{3^2+2^2} = (3,\,2)/\sqrt{13}$. Riktningsderivatan ges då av

$$g_{1,\,\mathbf{u}} = \nabla g_1 \cdot \hat{\mathbf{u}} = (-9,\,8)\cdot \frac{(3,\,2)}{\sqrt{13}} = -\frac{11}{\sqrt{13}}.$$

(b)

$$f_2(1,\,1) = 2,$$
$$f_{2,\,x} = y^4 + \frac{3x^2}{y} \overset{(1,1)}{=} 4,$$
$$f_{2,\,y} = 4xy^3 - \frac{x^3}{y^2} \overset{(1,1)}{=} 3,$$
$$f_{2,\,xx} = \frac{6x}{y} \overset{(1,1)}{=} 6,$$
$$f_{2,\,xy} = 4y^3 - \frac{3x^2}{y^2} \overset{(1,1)}{=} 1,$$
$$f_{2,\,yy} = 12xy^2 + \frac{2x^3}{y^3} \overset{(1,1)}{=} 14.$$

Således ges Taylorpolynomet av grad två i $(1,\,1)$ av

$$P(h,\,k) = 2 + (4h+3k) + \frac{1}{2}(6h^2 + 2hk + 14k^2) = 2 + 4h + 3k + 3h^2 + hk + 7k^2.$$

Då vi sätter $h = -0.03$, $k = 0.02$ får vi approximationen

$$f(0.97,\,1.02) \approx P(-0.03,\,0.02) = \cdots = 1.9449.$$

(c)

$$g_{2,\,x} = z^2 e^{xz} \overset{(0,1,2)}{=} 4,$$
$$g_{2,\,y} = z^2 \overset{(0,1,2)}{=} 4,$$
$$g_{2,\,z} = e^{xz}(1+xz) + 2yz \overset{(0,1,2)}{=} 5.$$

Eftersom $g_{2,\,z}(0,\,1,\,2) \neq 0$ så är z en implicit funktion av x och y i en omgivning. Dessutom enligt Implicita Funktionssatsen gäller i punkten $(0,\,1)$ att

$$h_x = -\frac{g_{2,\,x}}{g_{2,\,z}} = -\frac{4}{5}, \quad h_y = -\frac{g_{2,\,y}}{g_{2,\,z}} = -\frac{4}{5}.$$

(d) För det första, $g_2^*(x,\,y) = g_2(x,\,y,\,1) = e^x + y$. För det andra,

$$\mathbf{F}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f_1(1,\,1)\\f_2(1,\,1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix},$$
$$(\mathbf{G}\circ\mathbf{F})\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \mathbf{G}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}g_1(2,\,2)\\g_2^*(2,\,2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}16\\2+e^2\end{bmatrix}.$$

För det tredje,

$$D\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{1,x} & f_{1,y} \\ f_{2,x} & f_{2,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 3y^2 \\ y^4 + \frac{3x^2}{y} & 4xy^3 - \frac{x^3}{y^2} \end{bmatrix} \overset{(1,1)}{=} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},$$

$$D\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{1,x} & g_{1,y} \\ g^*_{2,x} & g^*_{2,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x - y & 6y - x \\ e^x & 1 \end{bmatrix} \overset{(2,2)}{=} \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ e^2 & 1 \end{bmatrix}.$$

För det fjärde, enligt kedjeregeln,

$$D(\mathbf{G} \circ \mathbf{F}) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ e^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52 & 48 \\ 2e^2 + 4 & 3e^2 + 3 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Ty $\ln y$ är definierat endast för $y > 0$ då är $D_f = \mathbb{R} \times (0, \infty)$.

(b) I en kritisk punkt gäller

$$f_x = 2xy - \ln y = 0, \tag{1}$$

$$f_y = x^2 - \frac{x}{y} = 0. \tag{2}$$

Från (2) får vi

$$0 = \frac{x^2 y - x}{y} \Rightarrow 0 = x^2 y - x = x(xy - 1) \Rightarrow x = 0 \text{ eller } y = 1/x.$$

Fall 1: $x = 0$. Insättning in i (1) ger $\ln y = 0 \Rightarrow y = 1$, dvs punkten $(0, 1)$.
Fall 2: $y = 1/x$. Insättning in i (1) ger $2 + \ln x = 0 \Rightarrow x = 1/e^2 \Rightarrow y = e^2$, dvs punkten $(1/e^2, e^2)$.

Det finns alltså två kritiska punkter, $(0, 1)$ och $(1/e^2, e^2)$. Näst till klassificeringen:

$$A = f_{xx} = 2y, \quad B = f_{xy} = f_{yx} = 2x - \frac{1}{y}, \quad C = f_{yy} = \frac{x}{y^2}.$$

I punkten $(0, 1)$ har vi $A = 2$, $B = -1$, $C = 0$, så $AC - B^2 < 0$ vilket medför en sadelpunkt.
I punkten $(1/e^2, e^2)$ har vi $A = 2e^2$, $B = 1/e^2$, $C = 1/e^6$, så $AC - B^2 = 1/e^4 > 0$ och $A > 0$, vilket medför ett lokalt minimum.

(c) f har varken ett globalt max eller min i sin definitionsmängd, ty t.ex.

$$f(x, 1) = x^2 \to +\infty, \text{ då } x \to \pm\infty,$$
$$f(-1, \varepsilon) = \varepsilon + \ln \varepsilon \to -\infty, \text{ då } \varepsilon \to 0^+.$$

3. (a) Den totala massan ges av

$$\iiint_D \rho \, dV = \iiint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{(x^2 + y^2 + z^2 + 4)^2} \, dx \, dy \, dz.$$

Området D är en "ice-cream cone" så det är lämpligt att byta till sfäriska koordinater. Således blir integralen

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/6} \sin\theta \, d\theta \int_0^2 \frac{\rho^3}{(\rho^2 + 4)^2} \, d\rho$$

$$\overset{u=\rho^2+4}{=} 2\pi \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \int_4^8 \frac{u - 4}{2u^2} \, du = \cdots = \pi \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right).$$

(b) Arean ges a priori av $\iint_{\pi(Y)} dS$, där $\pi(Y)$ är ytans projektion på xy-planet. Notera att villkoret $z \geq 0$ innebär att $|x| \geq |y|$ på ytan. Således är

$$\pi(Y) = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ |x| \geq |y|\},$$

vilket kan uttryckas i polära koordinater som

$$\pi(Y) = \left\{(r,\, \theta) : 0 \leq r \leq 1,\ -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \text{ eller } \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}\right\}.$$

För det andra, eftersom vi har en funktionsyta $z = f(x,\, y) = x^2 - y^2$ så är

$$dS = \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1}\, dx\, dy = \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}\, dx\, dy.$$

Arean ges därmed i polära koordinater av (notera att det räcker att integrera över den högre halvan av $\pi(Y)$ och dubblera, av symmetriskäl)

$$2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^1 \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr\, d\theta = \cdots = \frac{\pi}{12}(5\sqrt{5} - 1).$$

(c) Byt variabler till $u = x - y$, $v = x + y$. Notera att T:s tre sidor ligger på linjerna $y = 0$, $x - y = 0$ och $x + y = 4$. Således beskrivs T i uv-planet av

$$T = \{(u,\, v) : 0 \leq v \leq 4,\ 0 \leq u \leq v\}.$$

Vi har

$$\frac{d(u,\, v)}{d(x,\, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Så integralen blir

$$\iint_T dx\, dy = \int_0^4 \int_0^v e^{u/v} \frac{d(x,\, y)}{d(u,\, v)}\, du\, dv = \frac{1}{2} \int_0^4 dv \int_0^v e^{u/v}\, du =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^4 dv\, [ve^{u/v}]_0^v = \frac{e - 1}{2} \int_0^4 v\, dv = 4(e - 1).$$

4. (a) Först har vi

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(e^{yz}) + \frac{\partial}{\partial y}(2xy - e^z) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2 - z^2) = 2x - 2z.$$

Låt K vara halvklotet som innesluts av halvsfären plus ekvatorn. Enligt Gauss sats så ges det totala flödet ut ur K av

$$\iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iiint_K (2x - 2z)\, dV.$$

Notera att $\iiint_K x\, dV = 0$ av symmetriskäl. Sedan byter vi till sfäriska koordinater och får

$$\iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = -2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta\, d\theta \int_0^1 \rho^3\, d\rho = \cdots = -\frac{\pi}{2}.$$

Å andra sidan har vi att det totala flödet ut ur K ges av

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS + \iint_{s_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS,$$

där den första termen är flödet upp genom halvsfären (det vi söker) och den andra är flödet ner genom ekvatorn. På S_2 gäller $\hat{\mathbf{N}} = (0,\, 0,\, -1)$ och $\mathbf{F} \overset{z=0}{=} (1,\, 2xy,\, x^2)$. Således är

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = -\iint_{S_2} x^2\, dS = -\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta \int_0^1 r^3\, dr = \cdots = -\frac{\pi}{4}.$$

Så slutligen,

$$-\frac{\pi}{2} = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS - \frac{\pi}{4} \;\Rightarrow\; \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = -\frac{\pi}{4}.$$

(b) På halvsfären gäller

$$dS = a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \overset{a=1}{=} \sin\theta \, d\theta \, d\phi,$$
$$\hat{\mathbf{N}} = \hat{\rho} = \frac{\rho}{a} = \rho = (x,\, y,\, z).$$

Vi har

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = \iint_{S_1} (e^{yz},\, 2xy - e^z,\, x^2 - z^2) \cdot (x,\, y,\, z) \, dS =$$
$$= \iint_{S_1} (xe^{yz} + 2xy^2 - ye^z + x^2 z - z^3) \, dS.$$

Av symmetriskäl ser vi direkt att

$$\iint_{S_1} xe^{yz} \, dS = \iint_{S_1} xy^2 \, dS = \iint_{S_1} ye^z \, dS = 0.$$

Med det vi har kvar så byter vi till sfäriska koordinater och får:

$$\iint_{S_1} (x^2 z - z^3) \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\sin^2\theta \cos^2\phi \cos\theta - \cos^3\theta) \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$
$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\phi \, d\phi \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \cos\theta \, d\theta - \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \cos^3\theta \sin\theta \, d\theta. \tag{3}$$

Notera att $\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \cos\theta \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^3\theta \sin\theta \, d\theta$ av symmetriskäl. Och sedan att

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2\phi \, d\phi = \pi, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \cos\theta \, d\theta \overset{u=\sin\theta}{=} \int_0^1 u^3 \, du = \frac{1}{4}.$$

Insättning in i (3) ger att flödet upp genom halvsfären blir $\frac{1}{4}(\pi - 2\pi) = -\frac{\pi}{4}$, v.s.v.

5. (a) Det ska finnas en vektor $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$ sådan att

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \mathbf{A} \cdot \mathbf{h} + ||\mathbf{h}|| \, \rho(\mathbf{h}),$$

där $\rho(\mathbf{h}) \to 0$ då $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$.

(b) Sats 2.3.4 i boken. Se mina egna anteckningar på kurshemsidan för beviset för godtyckligt $n \in \mathbb{N}$.

(c) Om f var differentierbar i $(0,\, 0)$ så skulle följande gälla:

$$f(h,\, k) = f(0,\, 0) + h \cdot f_x(0,\, 0) + k \cdot f_y(0,\, 0) + \sqrt{h^2 + k^2} \, \rho(h,\, k), \quad \text{där } \rho(h,\, k) \to 0 \text{ då } (h,\, k) \to (0,\, 0). \tag{4}$$

Per definition av partiella derivator så har vi

$$f_x(0,\, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,\, 0) - f(0,\, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3/h^2}{h} = 1,$$
$$f_y(0,\, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,\, k) - f(0,\, 0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{3k^4/k^2}{k} = 0.$$

Insättning in i (4) ger

$$\rho(h,\, k) = \frac{2h^4 + 3k^4 + h^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

f är alltså differentierbar i $(0,\, 0)$ om och endast om denna funktion går mot noll då $(h,\, k) \to (0,\, 0)$. Men så är inte fallet. T.ex.

$$\rho(h,\, h) = \frac{5h^4 + h^3}{2\sqrt{2}\, h^3} \to \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \text{då } h \to 0.$$

6. (a) D sägs vara reguljär i x-led om det finns en uppdelning av D i ändligt många delområden $D_1, \ldots, D_n$ sådan att, för varje $i = 1, \ldots, n$, det finns konstanter a_i, b_i och C^1-funktioner $\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$ sådana att

$$a_i \leq b_i, \quad \alpha_i(x) \leq \beta_i(x) \; \forall\, x \in [a_i, b_i],$$
$$D_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_i \leq x \leq b_i,\ \alpha_i(x) \leq y \leq \beta_i(x)\}.$$

Analogt, så sägs D vara reguljär i y-led om det finns en uppdelning av D i ändligt många delområden $D'_1, \ldots, D'_m$ sådan att, för varje $j = 1, \ldots, m$, det finns konstanter c_j, d_j och C^1-funktioner $\gamma_j(y)$, $\delta_j(y)$ sådana att

$$c_j \leq d_j, \quad \gamma_j(y) \leq \delta_j(y) \; \forall\, y \in [c_j, d_j],$$
$$D'_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c_j \leq y \leq d_j,\ \gamma_j(y) \leq x \leq \delta_j(y)\}.$$

D sägs vara reguljär om den är reguljär i både x-led och y-led.

(b) Sats 9.2.1 i boken.

7. Vi har

$$f(x) = \int_0^{b(x)} g(x, t)\, dt, \quad \text{där } b(x) = x \text{ och } g(x, t) = \sin(x - t)\ln(1 + t^2).$$

Enligt Sats 5.1.2 i boken har vi

$$f'(x) = \int_0^x \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)\, dt + g(x, x) \overset{\sin 0 = 0}{=} \int_0^x \cos(x - t)\ln(1 + t^2)\, dt + 0.$$

Samma sak en gång till, med $h(x, t) = \cos(x - t)\ln(1 + t^2)$, ger

$$f''(x) = \int_0^x \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)\, dt + h(x, x) \overset{\cos 0 = 1}{=} -\int_0^x \sin(x - t)\ln(1 + t^2)\, dt + \ln(1 + x^2) =$$
$$= -f(x) + \ln(1 + x^2) \Rightarrow f''(x) + f(x) = \ln(1 + x^2), \quad \text{v.s.v.}$$